УДК 517.9:519.3

ПРИЛОЖЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩЕГО ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Акбаров Д. Е., Туракулов Х. Ш.
Кокандский государственный педагогический институт, Коканд, Узбекистан
E-mail: kspi_info@edu.uz

В статье приведены результаты доказательства теоремы о достаточном условии применимости принципа сжимающего отображения в пространстве $L_p[a,b]$, $p>1$, с приведением к нелинейному интегральному уравнению, пользуясь функцией Грина, для нахождения решения задачи с начальным и/или граничным условиями квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Способом, приведённым в доказательстве теоремы, пользуясь начальным условием $u(a)=u_0$, определяется $u_1(x)$, далее с таким же порядком нахождения последовательность функций $u_3(x)$, $u_4(x)$, ... , $u_m(x)$, ... даёт возможность приближения к решению задачи с желаемой точностью. Доказанная теорема и другие сопутствующие результаты могут применяться для исследования и нахождения решений практических задач.

Ключевые слова: *квазилинейное уравнение; дифференциальное уравнение; граничное и начальное условия; функция Грина; нелинейное интегральное уравнение; функциональное пространство; принцип сжимающего отображения; достаточное условие.*

Введение

Процессы прикладных задач на основе правил и законов естественных наук моделируются дифференциальными, интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями, неравенствами и включениями с соответствующими начальными и граничными условиями, определяемыми средой [1 - 3].

В таких функциональных соотношениях искомая функция описываемого процесса может выражаться линейной или нелинейной зависимостью с соответствием среды [4 - 8]. Линейные функциональные задачи исследуются достаточно давно, вследствие чего созданы теоретические и прикладные основы методов их исследований, а также нахождения решений. Функциональные модели, где неизвестная функция и/или её производные имеют нелинейные зависимости, часто адекватно описывают процессы исследуемых объектов [2 - 8].

Постановка задачи

Разнообразие математических моделей нелинейной зависимости требует особого научного подхода к их исследованию и методам нахождения решения задач. В приложениях для адекватного течения процесса возникает необходимость учитывать реальные обстоятельства по сущности разновидностей нелинейной зависимости.

Ниже в банаховых пространствах для нелинейных функциональных уравнений исследуются вопросы применимости принципа сжимающего отображения.

Решение задачи

Известно, что, если в нормированном пространстве X любая фундаментальная последовательность

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X,$$

т. е.
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|x_n - x_m\|_X = 0$$

стремится к некоторому пределу $x_0 \in X$, то такое нормированное пространство называется полным или банаховым [9].

Рассмотрим следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-порядка:

$$Lu = a_0(x)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + a_n(x)u(x) = f(x), \quad (1)$$

где коэфициенты $a_i(x)$, $i=1,\dots,n$; и функция правой части уравнения $f(x)$ на области $x \in D \subset R$ оси действительных чисел непрерывные.

Уравнение

$$Lu = a_0(x)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + a_n(x)u(x) = 0 \quad (2)$$

является однородным, соответствующим

неоднородному уравнению (1).

Сумма частного решения уравнения (1) и общего решения, соответствующего ему однородного уравнения (2), выражает решение неоднородного уравнения.

Пусть функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ являются решениями однородного (2) уравнения. То, что они имеют производные n-порядка, следует непрерывность этих функций и их производных до $(n-1)$-порядка.

Известно, что линейное однородное дифференциальное уравнение n–порядка (2) не имеет линейно независимых решений в количестве больше чем n.

Решения $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ есть линейно независимыми, если в области $x \in D \subset R$ равенство $\lambda_1 u\ (x) + \lambda_2 u_2(x) + ... + \lambda_n u_n(x) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, т. е. все коэффициенты $\lambda_i\ (i = 1, 2, ..., n;)$ тождественно равны нулю. Достаточным условием линейной независимости является отличие от нуля определителя Вронского, т. е.

$$W[u_1, u_2, ..., u_n] = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & ... & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2''(x) & \dots & u_n''(x) \\ \multicolumn{4}{l}{......................................} \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Если функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ – линейно независимые решения линейного однородного уравнения (2), тогда общее решение соответствующего неоднородного уравнения (1) выражается в виде

$$u(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) + ... + c_n(x)u_n(x), \quad (3)$$

где функции $c_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., n;)$ и их производные $c_k'(x)$, $(k = 1, 2, ..., n;)$ находятся из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x) + ... + c_n'(x)u_n(x) = 0 \\ c_1'(x)u_1'(x) + c_2'(x)u_2'(x) + ... + c_n'(x)u_n'(x) = 0 \\ .... \\ c_1'(x)u_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)u_2^{(n-2)}(x) + ... + c_n'(x)u_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x)u_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)u_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)u_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases} \quad (4)$$

Решив систему уравнений (4) относительно неизвестных $c_k'(x)$, $(k = 1, 2, ..., n;)$, например методом Гаусса, находятся их выражения с функциями $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$, так же производными $u_1^{(j)}(x)$, $u_2^{(j)}(x)$, …, $u_n^{(j)}(x)$, $(j = 1, 2, ..., n-1;)$ и $\dfrac{f(x)}{a_0(x)}$. После с интегрированием $c_k(x) = \int c_k'(x)dx + r_k$, $(k = 1, 2, ..., n;)$, находятся эти коэффициенты.

Во многих случаях частное решение, зависящее от начальных/граничных условий, выражается через функции Грина $G(x, \xi)$, т. е.

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi , \quad (5)$$

а общее решение

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + ... + A_n u_n(x), \quad (6)$$

где функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ – линейно независимые решения уравнения (2), постоянные коэффициенты A_k, $(k = 1, 2, ..., n;)$ находятся по начальному или граничному условиям.

Если известны линейно независимые решения $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ уравнения (2), то функцию Грина можно представить через них в следующем виде

$$G(x, \xi) = \frac{1}{f(\xi)}[c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x) + ... + c_n'(x)u_n(x)]U(x - \xi),$$

где $c_k'(x)$, $(k = 1, 2, ..., n;)$ решения системы уравнений, функция $U(x - \xi)$ удовлетворяет условию

$$U(x - \xi) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \prec \xi ; \\ 1, \textit{если } x \succ \xi . \end{cases}$$

Если по начальным или граничным условиям коэффициенты A_k, $(k = 1, 2, ..., n;)$ равны нулю в выражении (6), то общее решение уравнения (1) также выражается как (5) [1, 10]. Вывод из этого используется в задачах исследования решений квазилинейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения линейные относительно высших порядков производной неизвестной функции есть квазилинейные [1].

Следующие отношения равенств:

1) Обыкновенное дифференциальное уравнение линейное относительно до n-порядка производных неизвестной функции $u(x)$, определённой на области $x \in [a, b] = \Omega \subset R$ действительных чисел, нелинейное относительно неизвестной функции, вида

$$L_{n,0}u = a_0\left(x\right)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1\left(x\right)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\left(x\right)\frac{du}{dx} =$$

$$= f_1\left(x, u\left(x\right)\right); \qquad (7)$$

2) Обыкновенное дифференциальное уравнение нелинейное относительно неизвестной функции и её производных m-порядка, линейное относительно производных от $(n-m-1)$-порядка до n-порядка, вида

$$L_{n,m}u = a_0\left(x\right)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1\left(x\right)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\left(x\right)\times$$

$$\times\frac{d^{n-m-1}u}{dx^{n-m-1}} = f_2\left(x, u\left(x\right), u^{(1)}\left(x\right), u^{(2)}, \ldots, u^{(m)}\left(x\right)\right); \qquad (8)$$

3) Уравнение в частных производных эллиптического типа неизвестной функции $u = u(x,y,z)$, определённой в области пространственных переменных $(x,y,z) \in \Omega \subseteq R^3$, вида

$$a_1\left(x,y,z\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2\left(x,y,z\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3\left(x,y,z\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =$$

$$= F_1\left(x,y,z,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right); \qquad (9)$$

4) Уравнение в частных производных параболического типа неизвестной функции $u\left(t,x,y,z\right)$, определённой в области пространственных переменных $(x,y,z) \in \Omega \subseteq R^3$ и времени $t \in [t_0, T]$, вида

$$a_0\left(t,x,y,z\right)\frac{\partial u}{\partial t} - a_1\left(t,x,y,z\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_2\left(t,x,y,z\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} -$$

$$-a_3\left(t,x,y,z\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F\left(t,x,y,z,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}\right); \qquad (10)$$

5) Уравнение в частных производных гиперболического типа неизвестной функции $u\left(t,x,y,z\right)$, вида

$$a_0\left(t,x,y,z\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_1\left(t,x,y,z\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_2\left(t,x,y,z\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} -$$

$$-a_3\left(t,x,y,z\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F_3\left(t,x,y,z,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}\right); \qquad (11)$$

являются квазилинейными дифференциальными уравнениями, имеющими важные прикладные значения в задачах моделирования реальных процессов.

Если соответствующие линейные однородные уравнения относительно этих приведённых уравнений не имеют ненулевых решений, удовлетворяющих начальным и граничным условиям, то задачи нахождения их решений с использованием функций Грина, определяемым учетом начальных и граничных условий, приводятся к нелинейным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям [10, 11]:

1) Соответствующее уравнение соотношению (7)

$$u\left(x\right) = \int_a^b G_{n,0}\left(x,\xi\right) f_1\left(\xi, u\left(\xi\right)\right) d\xi; \qquad (12)$$

2) Относительно уравнения (8)

$$u\left(x\right) = \int_a^b G_{n,m}\left(x,\xi\right) f_2\left(\xi, u\left(\xi\right), u^{(1)}\left(\xi\right), u^{(2)}\left(\xi\right),\right.$$

$$\left.\ldots, u^{(m)}\left(\xi\right)\right) d\xi; \qquad (13)$$

3) По уравнению (9)

$$u\left(x,y,z\right) = \int_{\Omega\subset R^3} G_1\left(x,y,z,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right) F_1\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\right.$$

$$\left. u\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2 \partial \xi_3}\right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3; \quad (14)$$

и так далее по соотношениям (10) и (11) определяются соответствия интегро-дифференциальных уравнений.

Ниже исследуются вопросы применимости принципа сжимающего отображения к задаче существования и единственности решения уравнения (7), когда соответствующее ему однородное уравнение

$$L_{n,0}u = a_0\left(x\right)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1\left(x\right)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\left(x\right)\frac{du}{dx} = 0$$

не имеет ненулевого решения, удовлетворяющего начально-граничным условиям. При этом с учётом начально-граничных условий используя функции Грина переходят к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению (12), относительно которого определяется достаточное условие применимости принципа сжимающего отображения для нахождения решения.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$u\left(x\right) = Au\left(x\right), \qquad (14)$$

где определённая в области $[a,b] = D \subset R$ неизвестная функция $u(x) \in X$, X – пространство функций, определяемое свойствами функции и особенностями постановки задачи.

По принципу сжимающего отображения, если $A: X \to X$ – отображение полного нормированного пространства в себя для $\forall u_1,\ u_2 \in X$ удовлетворяет условию

$$\left\| Au_1(x) - Au_2(x) \right\|_X < \alpha \left\| u_1(x) - u_2(x) \right\|_X ,$$

где $0 < \alpha < 1$, то уравнение (14) имеет единственное решение $u_0(x) = Au_0(x)$. Это решение $u_0(x) \in X$ называется неподвижной точкой [9] отображения $A: X \to X$.

Производное уравнение (12) в самом деле, является эквивалентным в смысле тождественности решений относительно уравнения (7), поэтому пространство области определения неизвестной функции нелинейного интегрального уравнения (12) устанавливается с учетом условия, наложенными на постановку задачи, связанные решением уравнения (7). Таким образом, в уравнении (7) неизвестная функция определена

$$u(x) \in C^{(n-1)}[a,b] \subset C[a,b] \subset L_p[a,b],$$

при этом имеет место соотношение

$$\left\| L_p[a,b] \right\| \le \|\cdot\|_{C[a,b]} \le \|\cdot\|_{C^{(n-1)}[a,b]} .$$

Введя следующие обозначения

$$B(\cdot) = \int_a^b G_{n,0}(x,\xi)(\cdot)\, d\xi$$

и
$$F_1(\cdot) = f_1(\xi,\cdot), \tag{15}$$

уравнение (12) можно записать в операторном виде

$$u = BF_1 u, \tag{16}$$

где B – линейный интегральный оператор, F_1 – нелинейное отображение.

Если обозначать суперпозицию этих операторов A, то

$$u = BF_1 u = Au \qquad \text{или} \qquad u = Au. \tag{17}$$

В случае предположения $u(x) \in L_p[a,b]$, нелинейный оператор $F_1 : L_p[a,b] \to L_q[a,b]$ и линейный оператор $B: L_q[a,b] \to L_p[a,b]$, а оператор, представляющий их суперпозицию $A: L_p[a,b] \to L_p[a,b]$. Теперь переходим к решению задачи определения достаточного условия применимости принципа сжимающего отображения относительно операторного уравнения (17).

Теорема. Пусть $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, где p и q – действительные числа, $\xi \in [a,b] = D \subset R$ и $\forall \zeta \in R$, а функция $f_1(\xi;\zeta)$ – равномерно непрерывна по переменному ζ. При этом:

а) если выполняется условие

$$\left|\ f_1(\xi,\zeta)\ \right| \le g(\xi) + C|\zeta|^{p-1}, \tag{18}$$

где $g(\xi) \in L_q[a,b]$, $C = const$, то отображение $f_1(\xi, u(\xi)) \in L_q[a,b]$, оператор

$$F_1(\cdot): L_p[a,b] \to L_q[a,b]$$

непрерывный и ограниченный;

б) если выполнено условие пункта *а*) и для $\forall \zeta_1, \zeta_2 \in R$ неравенство

$$\left|\ f_1(\xi,\zeta_1) - f_1(\xi,\zeta_2)\ \right| \le \alpha |\zeta_1 - \zeta_2|^{p-1},\ 0 < \alpha < 1 \tag{19}$$

то оператор $F_1(\cdot): L_p[a,b] \to L_q[a,b]$, определяемый функцией $f_1(\xi, u(\xi)) \in L_q[a,b]$, обладает свойством сжимаемости относительно некоторой функции нормы $\left\| u_1(\xi) - u_2(\xi) \right\|_{L_p[a,b]}$ произвольных $u_1(\xi), u_2(\xi) \in L_p[a,b]$;

в) если выполнены условия пунктов *а*) и *б*), кроме того имеет место $\|B\|_{L_p[a,b]} \cdot \alpha = \beta < 1$, то уравнение (12) имеет единственное решение $u(x) \in L_p[a,b]$;

г) если выполнены условия пунктов *а*), *б*), *в*) и решения $u(x) \in L_p[a,b]$ уравнения (12), имеющие производные n-порядка, т. е.

$$u(x) \in L_p[a,b] \cap C^{(n)}[a,b],$$

удовлетворяют начально-граничным условиям решения уравнения (1), то оно одновременно является решением начально-граничной задачи связанной уравнением (1) или (7).

Доказательство. Действительно при выполнении неравенства (18) справедливо следующее

$$\int_a^b [f_1(\xi,u(\xi))]^q d\xi \le \left| \int_a^b [f_1(\xi,u(\xi))]^q d\xi \right| \le$$

$$\le \int_a^b \left| f_1(\xi,u(\xi)) \right|^q d\xi \le$$

$$\int_a^b |g(\xi)|^q d\xi + C \int_a^b |u(\xi)|^{(p-1)q} d\xi =$$

$$= \left(\int_a^b |g(\xi)|^q\, d\xi \right) + C \left(\int_a^b |u(\xi)|^p\, d\xi \right) = const < \infty, \tag{20}$$

где использовано равенство $(p-1)q = p$, следующее из предположения $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Из неравенства (20) следует, что функция $f_1(\xi, u(\xi)) \in L_q[a,b]$, оператор $F_1(\cdot): L_p[a,b] \to L_q[a,b]$. Теперь переходим к доказательству непрерывности и ограниченности этого оператора.

Таким образом, из равномерной непрерывности функции по переменному ζ при каждом фиксированном ξ, следует, что $\forall \varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$ для всех $\zeta_1, \zeta_2 \in R$, удовлетворяющих условию $|\zeta_1 - \zeta_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f_1(\xi;\zeta_1) - f_1(\xi;\zeta_2)| < \varepsilon$. Это свойство обеспечит непрерывность оператора $F_1(\cdot): L_p[a,b] \to L_q[a,b]$. Так как при этом по каждому числу $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$ для всех $u_1(\xi), u_2(\xi) \in L_p[a,b]$, удовлетворяющих условию

$$\|u_1(\xi) - u_2(\xi)\|_{L_p[a,b]} < \delta$$

выполняется

$$\|F_1(u_1) - F_1(u_2)\|_{L_q[a,b]} =$$

$$= \|f_1(\xi, u_1(\xi)) - f_1(\xi, u_2(\xi))\|_{L_q[a,b]} < \varepsilon,$$

что утверждает непрерывность оператора.

Оператор $F_1(\cdot): L_p[a,b] \to L_q[a,b]$ называется ограниченным, если ограниченное множество пространства $L_p[a,b]$ отображает на ограниченное множество пространства $L_q[a,b]$. Пусть ограниченное подмножество

$$M = \left\{ u(\xi) \in L_p[a,b] : \|u(\xi)\|_{L_b[a,b]} = \left(\int_a^b |u(\xi)|^p \, d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \le \right.$$

$$\left. \le k_1 = const \right\} \subset L_p[a,b].$$

Для каждого элемента $u(\xi) \in M$ выполняется неравенство (20). Отсюда следует, что

$$N = \left\{ F_1 u = f_1(\xi, u(\xi)) \in L_q[a,b] : \|F_1 u\|_{L_q[a,b]} = \right.$$

$$= \left(\int_a^b |f_1(\xi, u(\xi))|^q \, d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \le k_2 = const.,$$

$$\left. \forall u(\xi) \in M \right\} \subset L_q[a,b]$$

как пример можно принимать

$$k_2 = \max_{u \in M} \|F_1 u\|_{L_q[a,b]} = \max_{u \in M} \|f_1(\xi, u(\xi))\|_{L_q[a,b]} =$$

$$= \max_{u \in M} \left(\int_a^b |f_1(\xi, u(\xi))|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Тем самим доказана ограниченность оператора $F_1(\cdot): L_p[a,b] \to L_q[a,b]$.

Неравенство (18) выполняется для $\forall \zeta_1, \zeta_2 \in R$, поэтому имеют место

$$|\ f_1(\xi, \zeta_1)\ | \le g(\xi) + C|\zeta_1|^{p-1}$$

и

$$|\ f_1(\xi, \zeta_2)\ | \le g(\xi) + C|\zeta_2|^{p-1}.$$

Из $f_1(\xi, u_1(\xi))$, $f_1(\xi, u_2(\xi)) \in L_q[a,b]$ следует, что их разность тоже принадлежит этому пространству, т. е.

$$f_1(\xi, u_1(\xi)) - f_1(\xi, u_2(\xi)) \in L_q[a,b].$$

По неравенству (19) имеется соотношение

$$\int_a^b |f_1(\xi, u_1(\xi)) - f_1(\xi, u_2(\xi))|^q \, d\xi \le$$

$$\le \alpha^q \int_a^b |u_1(\xi) - u_2(\xi)|^{(p-1)q} \, d\xi = \alpha^q \int_a^b |u_1(\xi) - u_2(\xi)|^p \, d\xi.$$

Отсюда следует

$$\|f_1(\xi, u_1(\xi)) - f_1(\xi, u_2(\xi))\|_{L_q[a,b]} =$$

$$= \left(\int_a^b |f_1(\xi, u_1(\xi)) - f_1(\xi, u_2(\xi))|^q \, d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\alpha^q \int_a^b |u_1(\xi) - u_2(\xi)|^p \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{q}} =$$

$$= \alpha \left(\|u_1(\xi) - u_2(\xi)\|_{L_p[a,b]} \right)^{\frac{p}{q}} =$$

$$= \alpha \left(\|u_1(\xi) - u_2(\xi)\|_{L_p[a,b]} \right)^{p-1}, \qquad (21)$$

так как $p > 1$ и $p - 1 > 0$.

Таким образом доказана часть *б*) теоремы.

Теперь переходим к доказательству части *в*) теоремы.

Если задано начальное условие $u(\xi_0) = u_0$, то из равенства (12) вычисляется

$$u_1(x) = \int_a^b G_{n,0}(x,\xi) f_1(\xi, u_0) \, d\xi.$$

Повторяя этот процесс, последовательно вычисляются

$$u_m(x) = \int_a^b G_{n,0}(x,\xi) f_1(\xi, u_{m-1}(\xi)) \, d\xi. \qquad (22)$$

Отсюда, используя интегральное неравенство Гёльдера, имеем

$$\left|u_1(x)-u_0(x)\right| =$$

$$=\left|\int_a^b G_{n,0}(x,\xi)\left[f_1(\xi,u_1(\xi))-f_1(\xi,u_0(\xi))\right]d\xi\right| \le$$

$$\le \left(\int_a^b \left|G_{n,0}(x,\xi)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left|f_1(\xi,u_1(\xi))-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_1(\xi,u_0(\xi))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left\|G_{n,0}(x,\xi)\right\|_{L_p[a,b]} \times$$

$$\times \left\|f_1(\xi,u_m(\xi))-f_1(\xi,u_{m-1}(\xi))\right\|_{L_q[a,b]}$$

так же

$$\left|u_m(x)-u_{m-1}(x)\right| = \left|\int_a^b G_{n,0}(x,\xi)\left[f_1(\xi,u_m(\xi))-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_1(\xi,u_{m-1}(\xi))\right]\ d\xi\right| \le \left(\int_a^b \left|G_{n,0}(x,\xi)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\int_a^b \left|f_1(\xi,u_m(\xi))-f_1(\xi,u_{m-1}(\xi))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\|G_{n,0}(x,\xi)\right\|_{L_p[a,b]} \left\|f_1(\xi,u_m(\xi))-f_1(\xi,u_{m-1}(\xi))\right\|_{L_q[a,b]}$$

для всех $m = 1,2,\ldots$.

Таким образом, справедлива цепочка неравенств

$$\left\|u_{m+1}(x)-u_m(x)\right\|_{L_p[a,b]} =$$

$$= \left\|\int_a^b G_{n,0}(x,\xi)\left[f_1(\xi,u_m(\xi))-f_1(\xi,u_{m-1})\right]\right\|_{L_p[a,b]} \le$$

$$\le \left\|G_{n,0}(x,\xi)\right\|_{L_p[a,b]} \times$$

$$\times \left\|f_1(\xi,u_m(\xi))-f_2(\xi,u_{m-1}(\xi))\right\|_{L_q[a,b]} \le$$

$$\le \|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\left(\left\|u_m(\xi)-u_{m-1}(\xi)\right\|_{L_p[a,b]}\right)^{p-1} \le \qquad (23)$$

$$\le \|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\cdot\left\|u_{m-1}(\xi)-u_{m-2}(\xi)\right\|_{L_p[a,b]}\right)^{p-1} =$$

$$= \left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^p \left(\left\|u_{m-1}(\xi)-u_{m-2}(\xi)\right\|_{L_p[a,b]}\right)^{p-1} \le$$

$$\le \ldots \le \left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{m(p-1)} \left(\left\|u_1(\xi)-u_0(\xi)\right\|\right)^{p-1}.$$

Из этого последнего соотношения, обозначив $\left(\left\|u_1(\xi)-u_0(\xi)\right\|\right)^{p-1} = r = const.$, имеем

$$\left\|u_{m+1}(\xi)-u_m(\xi)\right\|_{L_p[a,b]} \le \left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{m(p-)} \times$$

$$\times\left(\left\|u_1(\xi)-u_0(\xi)\right\|\right)^{p-1} = r\cdot\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{m(p-1)}. \quad (24)$$

Из следующего неравенства

$$\left\|u_{m+l}(x)-u_m(x)\right\|_{L_p[a,b]} =$$

$$= \left\|u_{m+l}(x)-u_{m+(l-1)}(x)+u_{m+(l-1)}(x)-u_{m+(l-2)}(x)+\right.$$

$$\left.+u_{m+(l-2)}(x)-\ldots+u_{m+1}(x)-u_m(x)\right\|_{L_p[a,b]} \le$$

$$\le \left\|u_{m+l}(x)-u_{m+(l-1)}(x)\right\|_{L_p[a,b]} +$$

$$+\ldots+\left\|u_{m+1}(x)-u_m(x)\right\|_{L_p[a,b]}$$

с учетом неравенства (23) при выполнении условия $\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha < 1$, используя свойство суммы членов монотонно убывающей геометрической прогрессии, имеем

$$\left\|u_{m+l}-u_m\right\|_{L_p[a,b]} \le \left\|u_{m+l}-u_{m+(l-1)}\right\|_{L_p[a,b]} +$$

$$+\left\|u_{m=(l-1)}-u_{m=(l-2)}\right\|_{L_p[a,b]} + \ldots + \left\|u_{m+1}-u_m\right\| \le$$

$$\le r\cdot\left[\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{(m+l-1)(p-1)} + \left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{(m+l-2)(p-1)} +\right.$$

$$\left.+\ldots+\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{m(p-1)}\right] = r\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{m(p-1)} \times$$

$$\times\left[1+\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)+\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\ldots+\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{l-2}+\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{l-1}\right] \le$$

$$\le r\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{m(p-1)}\cdot\frac{1}{1-\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)}.$$

Тогда при условии $\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha < 1$ имеет место

$$\lim_{m\to\infty} \left\|u_{m+l}-u_m\right\|_{L_p[a,b]} \le$$

$$\le r\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)^{m(p-1)} \frac{1}{1-\left(\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha\right)} = 0\,.$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности $\{u_m(x)\}\subset L_p[a,b]$, полученной по равенству (22).

Пространство функции $L_p[a,b]$ полное, поэтому последовательность $\{u_m(x)\} \subset L_p[a,b]$ стремится к некоторому пределу

$$\lim_{m\to\infty} u_m(x) = u(x) \in L_p[a,b].$$

От непрерывности оператора $A = BF_1 : L_p[a,b] \to L_p[a,b]$, представляющего суперпозицию линейного непрерывного оператора $B : L_q[a,b] \to L_p[a,b]$ и нелинейного непрерывного оператора $F_1 : L_p[a,b] \to L_q[a,b]$, следует, что

$$BF_1 u = Au = A\lim_{m\to\infty} u_m = \lim_{m\to\infty} Au_m = \lim_{m\to\infty} u_{m+1} = u.$$

Таким образом, при выполнении соответствующих условий теоремы, доказано существование решения $u(x) \in L_p[a,b]$ операторного уравнения $u = BF_1 u = Au$ или уравнения (12), т.е. нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int_a^b G_{n,0}(x,\xi) f_1(\xi, u(\xi))\, d\xi.$$

Теперь покажем, что при выполнении условия теоремы это решение единственно. Допустим, существуют функции $u(x) \neq v(x)$, принадлежащие $u(x), v(x) \in L_p[a,b]$, которые удовлетворяют равенству

$$u = BF_1 u = Au \quad \text{и} \quad v = BF_1 v = Av$$

или

$$u(x) = \int_a^b G_{n,0}(x,\xi) f_1(\xi, u(\xi))\, d\xi$$

и

$$v(x) = \int_a^b G_{n,0}(x,\xi) f_1(\xi, v(\xi))\, d\xi.$$

Тогда

$$0 \le \|u - v\|_{L_2[a,b]} = \|BF_1 u - BF_1 v\|_{L_p[a,b]} =$$

$$= \|Au - Av\|_{L_p[a,b]} \le$$

$$\le \left(\|B\|_{L_p[a,b]} \cdot \alpha\right)\left(\|u - v\|_{L_p[a,b]}\right)^{p-1} = \beta\left(\|u - v\|_{L_p[a,b]}\right)^{p-1},$$

где $\|B\|_{L_p[a,b]} \cdot \alpha = \beta < 1$, неравенства следует $\|u - v\|_{L_p[a,b]} = 0$. Отсюда заключается $u = v$, т.е. при выполнении условия теоремы уравнение (12) имеет единственное решение.

Доказательство части *г*) теоремы непосредственно вытекает из выше изложенных сведений. Действительно, если решение $u(x) \in L_p[a,b]$ уравнения (12) имеет частные производные n-порядка, т.е.

$$u(x) \in L_p[a,b] \cap C^{(n)}[a,b]$$

и удовлетворяет начально-граничным условиям, наложенным на решение уравнения (1), то оно будет решением задачи уравнения (1) или (7), связанным с начально-граничными условиями.

Выводы

Таким образом, исследованы вопросы, связанные с решением квазилинейных дифференциальных уравнений. Высказано предположение о том, что соответствующее линейное однородное уравнение относительно заданного квазилинейного уравнения не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих начально-граничным условиям. При этом при использовании функции Грина, нахождение решения квазилинейного уравнения приводится к решению интегрального или интегрально-дифференциального уравнения. Класс таких уравнений запишется в операторном виде $u = BF_1 u = Au$ или $u = Au$ как суперпозиции линейного интегрального оператора $B : L_q[a,b] \to L_p[a,b]$ с ядром функции Грина и нелинейного оператора $F_1 : L_p[a,b] \to L_q[a,b]$, что представляет отображение нелинейной части заданного квазилинейного уравнения.

Доказана теорема о достаточном условии применимости принципа сжимающего отображения к нелинейному операторному уравнению $u = Au$. Как и в доказательстве теоремы, пользуясь начальным условием $u(a) = u_0$ вычисляется $u_1(x)$, аналогично, пользуясь $u_1(x)$ вычисляется $u_2(x)$ и в таком порядке последовательность $u_3(x)$, $u_4(x)$, ... , $u_m(x)$, ..., которая выражает приближение к решению с любой точностью. Это позволяет получать достаточно широкое применение теоремы, например, при повышении точности работы автоматических контрольно-измерительных приборов. Условия теоремы можно сформулировать относительно уравнений (13), (14) и других в соответствующем виде.

Литература

[1] А. Н. Тихинов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*. Москва, СССР: Наука, 1966.

[2] Г. И. Марчук, *Математические модели в иммунологии*. Москва, СССР: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1980.

[3] П. Эткинс, *Физическая химия*. В 2 томах. Пер. с англ. Москва, СССР: Мир. 1980.

[4] Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*. Москва, СССР: Мир, 1978.

[5] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*. Москва, СССР: Наука, 1972.

[6] Д. Е. Акбаров, В. С. Мельник, В. В. Ясинский,

Методы управления смешанными (сосредоточенно-распределенными) системами. Операторный подход. Київ, СРСР: Вирій, 1998.
[7] Д. Е. Акбаров, "Про одну оптимізацийну задачу в лебегових просторах", *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, № 2, с. 84-87, 1998.
[8] Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения*. Москва, СССР: Наука, 1988.
[9] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва, СССР: Наука, 1981.
[10] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*. Москва, СССР: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956.
[11] А. Г. Бутковский, *Характеристики систем с распределенными параметрами (справочное пособие)*. Москва, СССР: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы. 1979.

УДК 517.9:519.3
Д. Є. Акбаров, Х. Ш. Туракулов
Кокандський державний педагогічний інститут, Коканд, Узбекистан
ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ СТИСКАЮЧОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Процеси прикладних задач досить часто моделюються диференціальними, інтегральними та інтегро-диференціальними рівняннями, нерівностями і включеннями з відповідними початковими і граничними умовами, визначеними середовищем.
Функціональні моделі, де невідома функція і/або її похідні мають нелінійні залежності, часто адекватно описують процеси досліджуваних об'єктів.
Різноманітність математичних моделей нелінійної залежності вимагає особливого наукового підходу до їх дослідження і методів знаходження вирішення завдань. У додатках для адекватного перебігу процесу виникає необхідність враховувати реальні обставини по суті різновидів нелінійної залежності.
Досліджені питання, пов'язані з розв'язанням квазілінійних диференціальних рівнянь. Припущено, що відповідне лінійне однорідне рівняння відносно заданого квазілінійного рівняння не має ненульових розв'язків, що задовольняють початково-граничним умовам. При цьому застосуванням функції Гріна знаходження розв'язку квазілінійного рівняння приводиться до розв'язку інтегрального або інтегро-диференціального рівняння.
У статті доведено теорему про достатню умову застосовності принципу стискаючого відображення у просторі $L_p\left[a,b\right]$, $p>1$, з приведенням до нелінійного інтегрального рівняння з використанням функції Гріна для пошуку розв'язку задачі з початковою та/або граничною умовами квазілінійного звичайного диференціального рівняння. Способом, наведеним у доведенні теореми, за початковою умовою $u\left(a\right)=u_0$ визначається $u_1\left(x\right)$, далі у аналогічному порядку відшукується послідовність функцій $u_3\left(x\right)$, $u_4\left(x\right)$, ... , $u_m\left(x\right)$, ... , що надає можливість наближення до розв'язку задачі з бажаною точністю. Доведена теорема та інші супутні результати можуть застосовуватись для дослідження і пошуку розв'язків практичних задач. Це дозволяє отримувати досить широке застосування теореми, наприклад, при підвищенні точності роботи автоматичних контрольно-вимірювальних приладів.
Ключові слова: квазілінійне рівняння; диференціальне рівняння; гранична і початкова умови; функція Гріна; нелінійне інтегральне рівняння; функціональний простір; принцип стискаючого відображення; достатня умова.

D. Y. Akbarov, X. Sh. Turakulov
Kokand state pedagogical institute, Kokand, Uzbekistan
APPLICATION OF THE PRINCIPLE OF CONTRACTION MAPPING TO STUDY THE SOLUTION OF NONLINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS IN BANACH SPACES

Processes of applied problems are often modeled by differential, integral and integro-differential equations, inequalities and inclusions with corresponding initial and boundary conditions determined by the environment.
Functional models, where the unknown function and / or its derivatives have nonlinear dependences, often adequately describe the processes of the objects under study.
The variety of mathematical models of nonlinear dependence requires a special scientific approach to their study and methods for finding solutions to problems. In applications, for an adequate course of the process, it becomes necessary to take into account the real circumstances in the essence of the varieties of nonlinear dependence.
The questions investigated are related to the quasilinear differential equations solution.
The theorem on the sufficient condition for the applicability of the principle of contraction mappings in space $L_p\left[a,b\right]$, $p>1$, with reduction to a nonlinear integral equation, using the Green's function, to find the solution of the initial-

boundary conditions of quasi-linear ordinary differential equations. The way is given in the proof of the theorem using the initial condition is determined by the $u(a)=u_0$, $u_1(x)$, then with the same procedure of finding a sequence of functions $u_3(x)$, $u_4(x)$, ... , $u_m(x)$, ... enables the approach to solving the problem with the desired accuracy. The above theorem and other as a byproduct, the results can be applied to research and find practical solutions of problems. This makes it possible to obtain a fairly wide application of the theorem, for example, when increasing the accuracy of the operation of automatic control and measuring devices.
Keywords: quasilinear differential equation; boundary and initial conditions; Green's function; nonlinear integral equation; function space; contraction mapping principle; sufficient condition.

Надійшла до редакції
29 лютого 2020 року

Рецензовано
11 березня 2020 року

УДК 681.121 :6 81.324.06

АВТОМАТИЗОВАНІ СИСТЕМИ ПЕРЕДАЧІ ПОКАЗАНЬ ВІД ПРИЛАДІВ ОБЛІКУ ЕНЕРГОНОСІЇВ. Частина 1

Писарець А. В., Писарець Є. В.
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна
E-mail: anna.v@ukr.net

В умовах неперервного зростання цін на енергоносії збільшується кількість приладів їх обліку, що у свою чергу, викликає потребу фіксації і передачі показань обслуговуючим організаціям. Фіксація показань здійснюється безпосередньо приладом обліку, їх передача двома методами: вручну або автоматично. Перший метод має низку суттєвих недоліків, пов'язаних з регулярністю і тривалістю процесу, імовірністю внесення помилок на будь-якому етапі, де приймає участь людина, складністю або неможливістю доступу до вузла обліку. Другий – створення систем автоматизованої передачі показань, що повністю усуває зазначені проблеми.

Передача інформації передбачає наявність наступних компонентів: відправника; інформації, що передається; середовища передачі, придатного для пересилання даного повідомлення; отримувача. Саме ці складові обумовлюють структуру систем автоматизованої передачі даних. Залежно від технологій і використовуваних передавальних середовищ зазначені системи умовно поділяються на дротові і бездротові.

Історично склалось так, що епоха автоматичного зчитування показань з лічильників розпочалась саме з дротових систем, які досі широко застосовуються завдяки високим завадостійкості та захищеності даних, надійності і незалежності від погодних умов.

У статті розглянуто дротові технології, що набули застосування для створення автоматизованих систем передачі показань від приладів обліку енергоносіїв, їх технічні характеристики і особливості застосування. Наведено приклади створення систем.

Результати проведеного дослідження виявили, що структура системи автоматизованої передачі показань від приладів обліку визначається їх кількістю на об'єкті та особливостями умов експлуатації, при цьому використовується широкий спектр різноманітного обладнання. Перспективою подальшої роботи є дослідження особливостей застосування бездротових технологій для створення автоматизованих систем передачі показань від приладів обліку енергоносіїв.

Ключові слова: *прилад обліку; показання; передача показань; автоматизована система; імпульсний вихід; RS-232; RS-485; M-Bus.*

Постановка проблеми

Широке розповсюдження приладів обліку енергоносіїв передбачає зняття з них показань і передачу цієї інформації обслуговуючим організаціям з певною періодичністю.

Отже ще на етапі монтажу засобу вимірювальної техніки необхідно передбачити можливість здійснення оперативної і регулярної фіксації показань. У випадку необхідності обслуговування 10 – 15 приладів обліку ускладнень зазвичай не виникає. На сучасному етапі оснащеності об'єктів енергоспоживання вузлами обліку більшість фахівців