

1...2 m. The delay of passage of pulses through this segment is measured. In the second cycle, the delay of the passage of pulses through the cable without this segment is measured. In the third cycle, the delay of passage of pulses through the entire cable is measured. According to the results of three measurements, the distance to the place of damage is calculated. To measure, it is enough to form three sequences of pulses of 5...10 ns in duration. The duration of the reflected points of damage to the line pulses increases to 50...80 ns. The meter operation in each clock cycle is controlled by a microcontroller. Calculations are carried out according to the program recorded in the memory of the microcontroller. The proposed algorithm is invariant to the type of cable being monitored. Using the proposed meter allows you to avoid the use of standard lengths of cables of various types. The measurement result does not depend on the parameters of the feedback circuit of the pulse generator. This provides increased measurement accuracy. When measuring distance in the range of 5...1000 m with an error of no more than 5 cm.

**Keywords:** electrical cable, damage, distance measurement, accuracy increase.

*Надійшла до редакції  
30 жовтня 2018 року*

*Рецензовано  
08 листопада 2018 року*

УДК 621.3.01

## ЕНЕРГЕТИЧНІ ПРОЦЕСИ В РЕЗИСТИВНИХ КОЛАХ ЗАРЯДУ СУПЕРКОНДЕНСАТОРІВ

*Білецький О. О., Котовський В. Й.*

*Національний технічний університет України*

*"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна*

*E-mail: [biletsky27@gmail.com](mailto:biletsky27@gmail.com)*

*У роботі розглянуто енергетичні процеси в резистивних колах заряду суперконденсаторів (нелінійних конденсаторів) від джерел постійної напруги при різних кінцевих умовах по напрузі на клеммах. Отримано загальне аналітичне й апроксимоване рішення нелінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку для аперіодичного процесу заряду суперконденсатора від літій-іонної акумуляторної батареї при припущенні, що ємність суперконденсатора лінійно залежить від напруги на його клеммах. Дане рішення надає можливість визначити залежності енергетичних втрат у зарядних колах від параметрів їх елементів.*

**Ключові слова:** енергетичні процеси, ємність, суперконденсатор, нелінійний конденсатор, диференціальне рівняння, внутрішній опір, джерело постійної напруги.

### Вступ

У теперішній час для забезпечення великих імпульсних струмів в електротехнічних та електромеханічних системах все частіше використовують накопичувальні суперконденсатори (іоністори, нелінійні конденсатори), що можуть забезпечувати значні швидкості зростання струму, а, відповідно, і значні імпульсні потужності. У випадках, коли необхідно тривалий час віддавати електричну енергію в навантаження, використовуються акумуляторні батареї (АБ) різного типу, які мають кращі показники по питомій енергії. Велика кількість сучасних наукових розробок спрямована на створення комбінованих джерел живлення, в яких АБ використовуються для довготривалого живлення навантаження ustalеним струмом, а суперконденсатори (СК) – для забезпечення значних струмів та імпульсних потужностей. Значним ускладненням довгий час був недостатній аналіз енергетичних характеристик комбінованих джерел живлення з СК та АБ.

За останні п'ять років значно покращились електротехнічні параметри СК. Ємність одного елемента батареї СК може становити тисячі фарад при номінальній напрузі до 4 вольт та внутрішньому опорі 0,1 мОм [2, 4, 6 - 12]. Перевагою СК порівняно з АБ є те, що вони можуть функціонувати без погіршення електротехнічних показників не менше одного мільйону циклів [6 - 9]. При застосуванні СК в комбінованих джерелах живлення, їх з'єднують послідовно в батареї задля отримання необхідної напруги на клеммах [6 - 9].

### Постановка задачі

Загальні електротехнічні та експлуатаційні характеристики сучасних СК та АБ, які можуть використовуватися в комбінованих джерелах живлення приведені у табл. 1 [6 - 9].

Згідно з наведеними вище даними (табл. 1), ресурс батареї СК як мінімум на три порядки перевищує ресурс популярної літій-іонної АБ [12]. Од-

нією з переваг використання СК є їх значні показники по питомій потужності (до  $9 \cdot 10^4$  Вт/кг) порівняно з сучасними літій-іонними АБ, при суттєво менших часових інтервалах заряду та розряду СК. При порівнянні показників по питомій енергії СК та літій-іонної АБ, можна бачити, що питома енергія АБ в 6-7 разів більша, ніж в промислових зразках

СК. В ряді робіт [3, 6 - 9] зазначалось, що в комбінованих джерелах живлення електромеханічних та електротехнічних систем доцільно використовувати АБ для довготривалого живлення стабільним струмом, а батареї СК – для короточасних імпульсних режимів.

Таблиця 1. Загальні електротехнічні та експлуатаційні характеристики сучасних СК та АБ

Характеристики	Тривалість заряду, с	Тривалість розряду, с	Число циклів заряд – розряд	Питома енергія, Вт·год/кг	Питома потужність, Вт/кг
Суперконденсатор	1 – 30	1 – 30	$>10^6$	30	$9 \cdot 10^4$
Літій-іонна АБ ємністю до 700 А·год	$3,6 \cdot 10^3 - 18 \cdot 10^3$	$\sim 10^3$	$10^3$	200	$4 \cdot 10^3$

Аналіз наукових джерел, в яких досліджувалися енергетичні процеси в колах заряду СК, показав, що в них проводились експериментальні дослідження на різноманітних стендах або в пакетах прикладних програм на персональних комп'ютерах [6 - 12, 15 - 16]. Але, не зважаючи на це, аналітичний розв'язок нелінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку для аперіодичного процесу заряду суперконденсатора (нелінійного конденсатора) від акумуляторної батареї за припущення, що ємність СК лінійно залежить від напруги на його клеммах, не проводився.

**Метою** даної роботи є отримання узагальненого аналітичного рішення нелінійного неоднорідного диференціального рівняння для аперіодичного процесу заряду від АБ нелінійного конденсатора, ємність якого є лінійною функцією від напруги на його клеммах, що дозволить визначати залежності енергетичних втрат у колах заряду від параметрів елементів.

#### Аналітичний розв'язок нелінійного неоднорідного диференціального рівняння

З наукових досліджень, що проводилися різними авторами, відомо, що в СК є частина ємності, величина якої залежить від напруги на його клеммах. В роботах [9, 12, 15] експериментально підтверджено, що ємність СК зростає при його заряді від джерела постійної напруги. В даних дослідженнях було враховано залежність ємності СК від напруги на його контактах.

З врахуванням фізичних властивостей подвійного електричного шару [3, 9, 11, 15] і одержаними експериментально результатами [7 - 9, 12, 15] загальну ємність СК необхідно розраховувати згідно з виразом:

$$C(U) = C_1 + k|U|, \quad (1)$$

де  $C_1$  – постійна ємність і  $k|U|$  ємність, яка лінійно залежить від напруги.

Якщо здійснювати заряд СК постійним стру-

мом (тобто якщо припустити, що  $i(t) = I = const$ ), тоді  $dQ = Idt$ , і з виразу для зміни заряду  $\Delta Q$  на кожній з обкладок СК [1] можна записати, що

$$Q = Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} Idt = I(t_2 - t_1) = C_1(U_2 - U_1) + k \cdot (U_2^2 - U_1^2). \quad (2)$$

З виразу (2) можна отримати окремий випадок для визначення величини заряду  $\Delta Q$  на кожній з обкладок СК, якщо його заряд починався за нульових початкових умов (тобто при  $t_1 = 0$  були  $U_1 = 0$  і  $Q_1 = 0$ ). Тоді, після заміни у виразі  $Q$  на  $Q$ ,  $U$  на  $U$  і  $t$  на  $t$ , отримаємо

$$Q = It = C_1 U + k U^2, \quad (3)$$

Розглянемо заряд суперконденсатора від літій-іонної акумуляторної батареї з номінальною напругою  $E$  і внутрішнім опором  $R_{AB}$ . Схема зарядного контуру представлена на рис. 1.

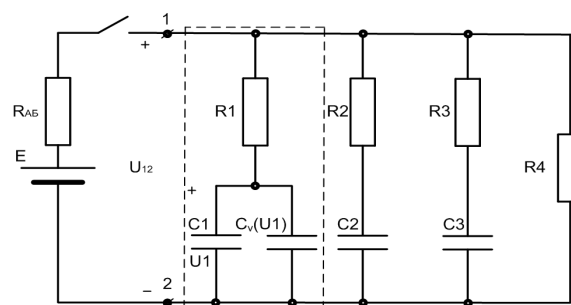


Рис. 1 Схема зарядного контуру СК

Перша гілка складається з незмінних елементів  $R_1$  і  $C_1$  і елементу  $C_v(U)$ , значення якого залежить від напруги  $U$ . Її стала часу  $\tau_1 \approx (R_1 + R_{AB})(C_1 + C_v(U))$  найменша [15], тому, з допустимою похибкою, в процесі заряду СК від АБ буде враховуватись лише перша гілка.

З метою визначення оптимальних режимів заряду СК від АБ проведемо аналіз енергетичних характеристик аперіодичного заряду при змінних початкових і кінцевих напругах. Початкові і кінцеві умови для струму приймаються такими:

$$i(t=0) = i(t=\infty) = 0.$$

Згідно з роботами ряду вчених [16] формулу для визначення зміни величини струму в часі необхідно записувати з врахуванням напруги СК по модулю:

$$i(t) = (C_1 + 2k|U|) \left( \frac{dU}{dt} \right). \quad (4)$$

Напруги  $U_{R_{AB}}(t)$ ,  $U_{R_I}(t)$  відповідно на резисторах  $R_{AB}$ ,  $R_I$  виражаються формулами (рис. 1):

$$U_{R_{AB}}(t) = R_{AB}i(t); \quad (5)$$

$$U_{R_I}(t) = R_I i(t). \quad (6)$$

Після об'єднання опорів зарядного контуру  $R_{\Sigma} = R_{AB} + R_I$ , згідно формули (4) можна записати

$$U_{R_{\Sigma}}(t) = R_{\Sigma}i(t) = R_{\Sigma} \left( (C_1 + 2k|U_{СК}(t)|) \left( \frac{dU_{СК}(t)}{dt} \right) \right). \quad (7)$$

Відповідно до другого закону Кірхгофа для схеми рис. 1 справедливий вираз

$$E = U_{R_{\Sigma}}(t) + U_{СК}(t). \quad (8)$$

Враховуючи вирази (1) – (3), формула (8) матиме вигляд:

$$E = R_{\Sigma} \left( (C_1 + 2k|U_{СК}(t)|) \left( \frac{dU_{СК}(t)}{dt} \right) \right) + U_{СК}(t). \quad (9)$$

Отримаємо нелінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$2kR_{\Sigma}|U_{СК}(t)| \left( \frac{dU_{СК}(t)}{dt} \right) + R_{\Sigma}C_1 \left( \frac{dU_{СК}(t)}{dt} \right) + U_{СК}(t) = E. \quad (10)$$

Вводимо наступні заміни

$$\begin{aligned} U_{СК}(t) &= U, \\ \frac{dU_{СК}(t)}{dt} &= U'. \end{aligned} \quad (11)$$

Диференціальне рівняння (10) можна представити у вигляді

$$2kR_{\Sigma}|U|U' + R_{\Sigma}C_1U' + U = E, \quad (12)$$

де  $E$  – електрорушійна сила джерела напруги;  $R_{\Sigma}$  – сумарний активний опір зарядного контуру СК;  $k$  – постійний коефіцієнт, який має розмірність [Ф/В];  $C_1$  – незмінна частина ємності СК згідно з виразом (1).

Дане нелінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку можна розв'язати для отримання невідомої функції  $U_{СК}(t)$  прямими або наближеними методами [17, 18]. Дане диференціальне рівняння нелінійне, тому аналітичний вид розв'язку такого рівняння необхідно шукати за допомогою елементів символічної математики в пакеті прикладних програм MATLAB. При складних функціях зовнішніх збурень (ламані, неінтегровані, розривні функції) знайти аналітичний розв'язок іноді вкрай важко. В таких випадках застосовуються наближені методи розв'язку диференціальних рівнянь (ДР) і отримують апроксимований розв'язок ДР [19].

Багато прикладних задач можливо розв'язати за допомогою диференціальних рівнянь або систем диференціальних рівнянь, які зв'язують незалежну похідну, шукану функцію та її похідні. Розв'язком диференціального рівняння буде функція, яка після підстановки в диференціальне рівняння перетворює його в тотожність. Рішенням диференціального рівняння  $y' = f(x)$  буде функція  $y = F(x)$ , яка є первісною для функції  $f(x)$  [17, 20].

Для багатьох звичайних ДР можна знайти точний розв'язок, як для випадку рівнянь і систем рівнянь з постійними коефіцієнтами. Аналітичний вид розв'язків таких рівнянь досить легко відшукується за допомогою елементів символічної математики [20] в пакеті прикладних програм MATLAB.

#### Чисельний розв'язок нелінійного неоднорідного диференціального рівняння

В реальних прикладних задачах електротехніки часто зустрічаються нелінійні неоднорідні ДР  $n$ -го порядку і системи таких рівнянь. При неможливості знайти точний розв'язок, використовують наближені методи в MATLAB на основі реалізації різноманітних чисельних алгоритмів розв'язку нелінійних ДР.

Для схеми зарядного контуру рис. 1 нелінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ННДР) першого порядку представлено у вигляді (12), для розв'язку якого застосовано функцію *dsolve* в MATLAB [20], яка призначена для пошуку розв'язку у символічному вигляді. Викликати цю функцію можна у форматі:

```
dsolve('equation'),  
або  
var = dsolve('equation'),
```

де 'equation' – диференціальне рівняння, яке записано згідно з правилами MATLAB, незалежною змінною за

замовчуванням є  $t$ . Для представлення диференціювання по незалежній змінній (оператора  $\frac{d}{dt}$ ) необхідно використовувати символ  $D$  в рядку рівняння.

Порядок похідної вказується цифрою після символу

$D$ . Наприклад, для похідної третього порядку  $\frac{d^3}{dt^3}$

необхідно записати  $D3$ . Для того, щоб вказати ім'я залежної змінної, наприклад  $u$ , слід без пропуску записати цей символ після символу  $D3u$  (що означає  $\frac{d^3u}{dt^3}$ ) [17, 20].

Всі функції і алгебраїчні операції позначаються звичним способом без додаткових розділювачів.

Всі функції і алгебраїчні операції позначаються звичним способом без додаткових розділювачів.

вих знаків. У розв'язку ННДР будуть присутні сталі інтегрування, оскільки не вказані початкові умови.

Функція *dsolve* дозволяє вказати інше ім'я незалежної змінної:

```
dsolve('equation', 'varname')
або
var = dsolve('equation', 'varname')
```

Наприклад, згідно правил MATLAB [20] ННДР першого порядку (12) можна записати у вигляді:

$$dsolve('R*(C1+2*k*abs(u))*Du+u=E') \quad (13)$$

Отримуємо розв'язок

$$U_1(t) = e^t + \text{lambertw}\left(0, \frac{\left( \frac{-(2ke^t - C_4 + t/R)}{(C_1 + 2ke^t)} \right)}{(C_1 + 2ke^t)}, \frac{(C_1 + 2ke^t)}{2k} \right), \quad (14)$$

$$U_2(t) = e^t - \text{lambertw}\left(0, \frac{\left( \frac{(2ke^t + C_4 - t/R)}{(C_1 - 2ke^t)} \right)}{(C_1 - 2ke^t)}, \frac{(C_1 - 2ke^t)}{2k} \right). \quad (15)$$

Функція Ламберта  $W$  [17, 19, 20] представляє собою розв'язок трансцендентного рівняння:

$$w(x) \cdot \exp(w(x)) = x, \quad (16)$$

де  $x$  – комплексне число.

Відомо, що  $W$  – багатозначна функція і рівняння (16) має нескінченну кількість розв'язків, серед яких переважна кількість комплексних. Гілками називають різні варіанти розв'язків, які позначаються цілим числом. Відповідно до цих правил розв'язки записують, як  $W_{k1}(x)$ , де  $k_1=0, \pm 1, \pm 2$  і т.д. Цю функцію часто застосовують, коли розв'язок виражений дійсним числом. За умови, що  $x$  – дійсне число, рівняння (16) може мати два дійсних розв'язки, у такому випадку вони зазвичай позначаються, як  $W_0(x)$  і  $W_{-1}(x)$ . Можливий випадок,

коли буде лише один розв'язок дійсним  $W_0(x)$  (а інший  $W_{-1}(x)$  – комплексним), або зовсім не буде дійсного розв'язку. Навіть за умови, що  $x$  дійсне число, гілки, які відрізняються від  $k_1=0, -1$ , завжди комплексні [21].

В MATLAB функція Ламберта  $W$  записується *lambertw*( $k1, x$ ), де параметр  $k1$  – номер комплексної гілки для багатозначної функції. Ця функція використовується не лише в комп'ютерній програмі MATLAB, а і в програмах Maple та Mathematica (в цій програмі дана функція позначена, як ProductLog [17, 19]). За допомогою функції Ламберта  $W$  можна отримати чисельні значення, графіки, похідні та інтеграли.

Розв'язок (14) актуальний, якщо не виконуються умови:

$$-2 \cdot e^1 < \text{lambertw} \left[ 0, \frac{\left( \frac{-(2ke^1 - C_4 + t/R)}{(C_1 + 2ke^1)} \right)}{(C_1 + 2ke^1)} \right] \frac{(C_1 + 2ke^1)}{k}, \quad (17)$$

$$2e^1 < \text{lambertw} \left[ 0, \frac{\left( \frac{(2ke^1 + C_4 - t/R)}{(C_1 - 2ke^1)} \right)}{(C_1 - 2ke^1)} \right] \frac{(C_1 - 2ke^1)}{k}. \quad (18)$$

Функція Ламберта  $W$  широко використовується в різних областях науки. За допомогою цієї функції можна роз'яснити багато фізичних аспектів. Функція Ламберта  $W$  застосовується не тільки для подібних задач теоретичної електротехніки, але і в статистиці, біології та обчислювальній техніці, наприклад, обчислення розподілень в теорії чисел, висоти хвиль в океанографії та релятивістській теорії гравітації [17, 20, 21].

Для того, щоб проаналізувати властивості даної функції Ламберта  $W$  [21], необхідно почати з графіка її дійсних коренів. На рис. 2 зображено графік двох дійсних гілок.

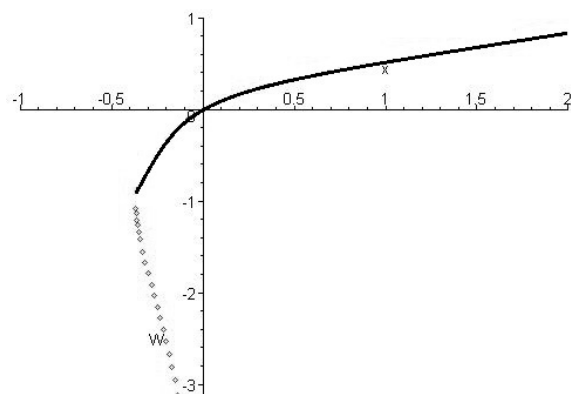


Рис. 2. Графік дійсних коренів функції Ламберта. Основна гілка функції  $W_0(x)$  позначена суцільною лінією, а гілка  $W_{-1}(x)$  – крапками

Функція Ламберта  $W$  [21] може бути продиференційована:

$$W' = \frac{e^{-W}}{(1+W)}. \quad (19)$$

Для визначення інших енергетичних характеристик виконується інтегрування функції [17, 21], яка включає в себе  $W$

$$\int W(x) dx = (W^2(x) - W(x) + 1)e^{W(x)} + C. \quad (20)$$

Для застосування в задачах теоретичної електротехніки корисною є асимптотична формула для комплексних чисел  $x$ :

$$W_{k1}(x) \approx \ln x + 2\pi i k_1 - \ln(\ln x + 2\pi i k_1). \quad (21)$$

У розв'язку нелінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку (12), яке представлено у вигляді (14), (15) – присутня функція Ламберта  $W$  [21]. В даному випадку необхідно зазначити, що при розв'язанні рівнянь (14), (15) – при виконанні умов (17), (18) – отримано випадок, коли вирази  $U_{СК\_1}(t)$ ,  $U_{СК\_2}(t)$  можуть мати дійсні корені, за умови рівності номера гілки  $k_1=0$ .

Аналітичний розв'язок ННДР 1-го порядку (14), (15) – враховуючи обмеження (17), (18) – досить громіздкий. В таких випадках застосовують наближені методи розв'язку ННДР і отримують апроксимований розв'язок ДР, на основі чисельних алгоритмів розв'язання.

В пакеті прикладних програм MATLAB, для розв'язку задач технічних обчислень було реалізо-

вано модель з метою дослідження і порівняння енергетичних характеристик кола при заряді суперконденсатора і лінійного конденсатора від акумуляторної батареї. Параметри СК і літій-іонної акумуляторної батареї [3], які використовувались при дослідженні наведено в табл. 2.

Таблиця 2. Параметри СК і літій-іонної акумуляторної батареї

Параметри схеми заміщення СК								Параметри літій-іонної АБ	
$R_1$ , Ом	$C_1$ , Ф	$k$ , Ф/В	$R_2$ , Ом	$C_2$ , Ф	$R_3$ , Ом	$C_3$ , Ф	$R_4$ , Ом	$E$ , В	$R_{AB}$ , Ом
0,0025	270	190	0,9	100	5,2	220	9000	2,3	0,012

На рис. 3 приведена залежність напруги на СК (а) та струму в зарядному колі (б), при заряді від нульових початкових умов  $U_{СК}(t=0)=0$  і  $i(t=0)=0$  в часовому діапазоні від нуля до  $t=70$  с.

В робочій області (Workspace) MATLAB функція залежності напруги на суперконденсаторі від часу  $U_{СК}(t)$  задана у вигляді вектору даних. MATLAB та його додатки забезпечують можливість для наближення і інтерполяції одномірних і багатомірних даних. Відповідно за допомогою при-

початкова напруга на ЛК і СК була нульовою. Ємність ЛК  $C_W$ , яка еквівалентна ємності СК, за умови рівності його напруги  $U_{СК}=0$  В, розрахована згідно з виразом (1) і дорівнює:  $C_W=270$  Ф [3]. Внутрішні опори ЛК і першої (швидкої) гілки СК були однаковими  $R_{ЛК}=R_1=0,0025$  Ом.

кладної програми Curve Fitting Tool в MATLAB [19] була проведена апроксимація функції залежності напруги на суперконденсаторі від часу  $U_{СК}(t)$ . В цьому додатку було реалізовано опис апроксимувальною функцією заданого вигляду іншої функції (апроксимованої), яка була задана у вигляді векторів даних  $U_{СК}$  і  $t$  в робочій області (Workspace) в MATLAB. Серед стандартних параметричних і не-параметричних моделей в Curve Fitting Tool було обрано експоненціальну модель (Exponential), як апроксимувальну функцію.

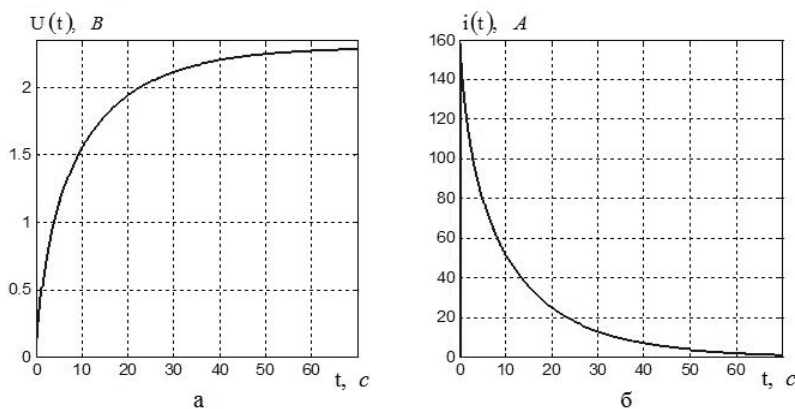


Рис. 3. Залежність напруги на СК (а) і струму в зарядному колі (б)

Апроксимований розв'язок нелінійного неоднорідного ДР 1-го порядку в діапазоні  $t_{П}=0$  до  $t_{К}$  буде записаним у вигляді суми двох експонент:

$$U_{СК}(t) = ae^{bt} + ce^{dt}. \quad (22)$$

Коефіцієнти (визначені в межах 95 %):

$$a = 1,93 \quad (1,918, 1,942),$$

$$b = 0,002814 \quad (0,002686, 0,002941),$$

$$c = -1,858 \quad (-1,87, -1,845),$$

$$d = -0,1589 \quad (-0,1614, -0,1564).$$

Статистика апроксимації даних:

**R-square:** 0.9973 – площа кореляції між початковими і наближеними значеннями. Значення, близьке до 1, вказує, що дисперсія незначна.

**Adjusted R-square:** 0.9973 – число степенів свободи апроксимованої площі кореляції.

**RMSE:** 0.04401 – корінь середньоквадратичної помилки або стандартна помилка. Значення, близьке до 0, вказує, що апроксимація може успішно використовуватися, оскільки, стандартне відхилення вибіркового середнього значення знаходиться у межах норми [19].

На рис. 4 приведені залежності напруги на суперконденсаторі при нульових початкових умовах  $U_{СК}(t=0)=0$  і  $i(t=0)=0$  і апроксимована

залежність штрих-пунктирною лінією (за аналогічних умов).

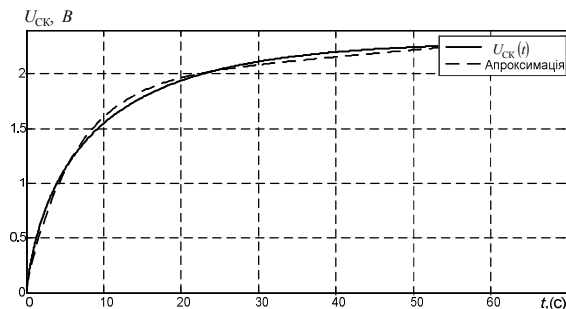


Рис. 4. Напруга на СК і апроксимована залежність

З урахуванням статистики апроксимації даних (рис. 4) і приведених залежностей напруги на СК за нульових початкових умов (експериментальної і апроксимованої), вираз (22) може використовуватися для дослідження електротехнічних процесів в колах заряду з нелінійними елементами.

#### Висновки

1. Отримано аналітичний розв'язок нелінійного неоднорідного диференціального рівняння для аперіодичного процесу заряду від акумуляторної батареї суперконденсаторів, емність яких є лінійною функцією від напруги на їхніх клеммах.

2. Отримано апроксимований розв'язок нелінійного неоднорідного диференціального рівняння при заряді суперконденсаторів від літій-іонної акумуляторної батареї за допомогою пакету прикладних програм MATLAB.

3. Аналітичний і апроксимований розв'язки нелінійного неоднорідного диференціального рівняння надають можливість аналізувати загальні залежності між енергетичними втратами у зарядних колах суперконденсаторів і параметрами їхніх елементів.

4. Для подальшого аналізу енергетичних процесів у колах заряду суперконденсаторів від акумуляторних батарей необхідно вдосконалювати еквівалентні схеми заміщення суперконденсаторів з урахуванням електрофізичних властивостей нелінійних конденсаторів при використанні новітніх матеріалів на зразок тривимірного пористого вуглецю.

#### Література

- [1] Л. А. Бессонов, *Теоретические основы электротехники*. Москва, СССР: Высшая школа, 1973.
- [2] Д. Г. Громадский, В. Ю. Изотов, і Ю. А. Малетин, “Моделирование и расчет рабочих параметров суперконденсатора”, *Наук. Вісник НТУУ КПІ*, № 6, с. 114-118, 2008.
- [3] О. О. Білецький, Н. І. Супруновська, і А. А. Щерба, “Залежність енергетичних характеристик кіл заряду суперконденсаторів від їх початкових і кінцевих напруг”, *Технічна Електродинаміка*,

№ 1, с. 3-10, 2016.

- [4] Н. И. Супруновская, А. А. Щерба, і О. А. Белецкий, “Процессы обмена энергией между нелинейными и линейными звеньями электрической схемы замещения суперконденсаторов”, *Техническая Электродинамика*, № 5, с. 3-11, 2015.
- [5] O. Biletsky, N. Suprunovska, і A. Shcherba, “The optimization of energy parameters of the electrical systems of charge of supercapacitor from accumulator battery”, in *2015 16th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE)*, Lviv, Ukraine, 2015, pp. 4–6.
- [6] A. F. Burke, “Batteries and Ultracapacitors for Electric, Hybrid, and Fuel Cell Vehicles”, *Proc. IEEE*, vol. 95, no 4, pp. 806–820, 2007. DOI: 10.1109/JPROC.2007.892490
- [7] A. Burke і M. Miller, “The power capability of ultracapacitors and lithium batteries for electric and hybrid vehicle applications”, *J. Power Sources*, vol. 196, no. 1, pp. 514–522, 2011. DOI: 10.1016/j.jpowsour.2010.06.092
- [8] A. Burke, M. Miller, і H. Zhao, “Ultracapacitors in Hybrid Vehicle Applications: Testing of New High Power Devices and Prospects for Increased Energy Density”, *Univ. Calif. Davis Inst. Transp. Stud. Res. Rep.*, 2012.
- [9] P. Kurzweil, B. Frenzel, і R. Gallay, “Capacitance Characterization Methods and Ageing Behaviour of Supercapacitors”, *Proc. 15th Int. Semin. Double Layer Capacit. Deerfield Beach FL USA*, pp. 14–25, 2005.
- [10] Y. Maletin, N. Stryzhakova, і S. Zelinsky, “New Approach to Ultracapacitor Technology: What it Can Offer to Electrified Vehicles”, *J. Energy Power Eng.*, vol. 9, no. 6, pp. 585–591, 2015. DOI: 10.17265/1934-8975/2015.06.010
- [11] B. Mihailescu, P. Svasta, і G. Varzaru, “Hybrid supercapacitor-battery electric system with low electromagnetic emissions for automotive applications”, *UPB Sci. Bull.*, vol. 75, no. 2, pp. 277–290, 2013.
- [12] F. Rafik, H. Gualous, R. Gallay, A. Crausaz, і A. Berthon, “Frequency, thermal and voltage supercapacitor characterization and modeling”, *J. Power Sources*, vol. 165, no. 2, pp. 928–934, 2007. DOI: 10.1016/j.jpowsour.2006.12.021
- [13] О. О. Білецький і В. Й. Котовський, “Енергетичні характеристики кіл коливального заряду суперконденсатора”, в *СПРТП-2017*, Вінниця, 2017, с. 10-11.
- [14] О. О. Білецький, А. А. Щерба, і Н. І. Супруновська, “Енергетичні характеристики кіл аперіодичного заряду суперконденсаторів від акумуляторних батарей”, *Вісник Нац. Техн. Ун-ту XIII Зб. Наук. Пр. Темат. Вип. Проблеми Автоматизованого Електропривода Теорія Практика*, № 12 (1121), с. 379–383, 2015.
- [15] L. Zubieta і R. Bonert, “Characterization of

- double-layer capacitors for power electronics applications”, *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 36, no. 1, pp. 199–205, 2000. DOI: 10.1109/28.821816
- [16] E. Harzfeld, R. Gallay, M. Hahn, i R. Kötz, “Capacitance and Series Resistance determination in high power ultracapacitors”, *ESSCAP 04 Maxwell Proceeding Belfort Fr.*, pp. 1–4, 2004.
- [17] Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко, О. Ю. Софіна, і О. М. Шушура, *Комп’ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень (ч. 1)*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2013.
- [18] H. N. Hassan i M. A. El-Tawil, “A new technique of using homotopy analysis method for second order nonlinear differential equations”, *Appl. Math. Comput.*, vol. 219, no. 2, pp. 708–728, 2012. DOI: 10.1002/ama.1400
- [19] И. Е. Ануфриев, Curve Fitting Toolbox - Математика - Matlab.Exponenta.Ru [Электронный ресурс] Доступно: <http://matlab.exponenta.ru/curvefitting/index.php>. Дата обращения: 22.09.18.
- [20] П. Г. Доля, “Часть 3. Использование MATLAB. Решение дифференциальных уравнений”, в *Основы работы в системе MATLAB*, Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, с. 1–52.
- [21] С. А. Сергеев і Ф. Ф. Спиридонов, “Применение функции Ламберта W в решении задачи теплопроводности”, *Горизонты образования*, № 4, 2002. [Электронный ресурс]. доступно: <http://edu.secna.ru>

УДК 621.3.01

**О. А. Белецкий, В. И. Котовский***Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, Украина***ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЯХ ЗАРЯДА СУПЕРКОНДЕНСАТОРОВ**

В работе рассмотрены энергетические процессы в резистивных цепях заряда суперконденсаторов (нелинейных конденсаторов) от источников постоянного напряжения при различных конечных условиях по напряжению на клеммах. Получено общее аналитическое и аппроксимированное решения нелинейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка для апериодического процесса заряда суперконденсатора от литий-ионной аккумуляторной батареи при предположении, что емкость суперконденсатора линейно зависит от напряжения на его клеммах. Данное решение позволяет определять зависимости энергетических потерь в зарядных цепях от параметров их элементов.

**Ключевые слова:** энергетические процессы, емкость, суперконденсатор, нелинейный конденсатор, дифференциальное уравнение, внутреннее сопротивление, источник постоянного напряжения.

**О. О. Biletskyi, V. I. Kotovskyi***National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine***ENERGY PROCESSES IN THE RESISTANCE CHARGE CIRCUITS OF SUPERCAPACITORS**

**Introduction** Nowadays, for the purpose of providing high pulsed currents in electrical and electromechanical systems, accumulation supercapacitors (ionistors, nonlinear capacitors) are increasingly used, which can provide significant growth rates of current, and, accordingly, significant pulsed capacities. **Formulation of the problem** An analysis of the scientific sources, in which the energy processes in charge circuits of supercapacitors were investigated, showed that they carried out experimental research on various stands or in packages of applied programs on personal computers. But despite this, the analytical solution of the nonlinear nonhomogeneous first-order differential equation for the aperiodic process of charge of a supercapacitor (a nonlinear capacitor) from a storage battery, assuming that the capacity of a supercapacitor is linearly dependent on the voltage at its terminals, was not carried out. **The purpose of this work** is to obtain a generalized analytical solution of a nonlinear inhomogeneous differential equation for the aperiodic charge process from the battery operation of a nonlinear capacitor whose capacitance is a linear function of the voltage at its terminals, which will determine the dependence of energy losses in charge circuits on the parameters of the elements. **Main part** In the paper the energy processes in the resistance charge circuits of supercapacitors (nonlinear capacitors) from the sources of constant voltage are considered under different conditions on the voltage at the terminals. A general analytical and approximate solution of a first-order nonlinear inhomogeneous differential equation for the aperiodic charge process of the supercapacitor from a lithium-ion battery is obtained under the assumption that the capacitance of a supercapacitor depends linearly on the voltage at its terminals. **Conclusions** This solution makes it possible to determine the dependence of the energy losses in the charge chains on the parameters of their elements.

**Key words:** energy processes, capacitance, supercapacitor, nonlinear capacitor, differential equation, internal resistance, constant voltage source.

*Надійшла до редакції  
17 жовтня 2018 року*

*Рецензовано  
26 жовтня 2018 року*