

## ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА НАВІГАЦІЙНИХ ПРИЛАДІВ І СИСТЕМ

УДК 681.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМОВ БИСО

Лазарев Ю. Ф., Аксененко П. М., Мураховский С. А.

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского», г. Киев, Украина

E-mail: [serge17@ua.fm](mailto:serge17@ua.fm)

Рассматриваются вопросы сравнения точности известных алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации (БИСО) с помощью компьютерного V-тестирования. Предложен способ обобщенного представления зависимости дрейфа погрешности алгоритма от шага опроса измерителей в виде безразмерных величин. Исследовано влияние на точность алгоритма величины шага опроса типа интегрируемого уравнения, вида алгоритма, количества шагов опроса в одном шаге интегрирования. Предложены два алгоритма с точностью, по крайней мере, на порядок большей, чем у известных алгоритмов. Сделаны выводы об эффективности V-тестирования для анализа точности алгоритмов.

**Ключевые слова:** бесплатформенная инерциальная система ориентации, алгоритм, точность, компьютерное моделирование.

**Вступлення**

Исследования показывают, что колебательное движение основания приводит, вследствие погрешностей алгоритмов, используемых для определения текущей ориентации, к появлению погрешностей в определении углов поворота основания тоже колебательного характера с тем же частотным спектром. Однако, когда частоты колебаний по двум из углов Эйлера-Крылова совпадают, возникает так называемый дрейф погрешности определения третьего из углов, т.е. возрастание среднего значения погрешности с постоянной скоростью. Спустя небольшой промежуток времени (порядка одной минуты) эта погрешность становится определяющей. Это позволяет принять скорость дрейфа погрешности (которую в дальнейшем для простоты будем называть просто дрейфом) в качестве основной характеристики, характеризующей точность того или иного алгоритма ориентации.

Дрейф погрешности обусловлен выпрямительным эффектом, возникающим вследствие наличия в интегрируемых уравнениях ориентации мультипликативных членов. Характерной чертой выпрямительного эффекта является существенная зависимость от сдвига фаз между колебаниями основания по двум углам. Это подтверждается непосредственным моделированием процесса обработки измерительной информации. Зависимость дрейфа от этого сдвига фаз – гармоническая. Очевидно, в качестве основной характеристики точности алгоритмов следует выбрать амплитуду этой гармонической зависимости.

Обычно считается, что амплитудные значения дрейфа наблюдаются при сдвиге фаз между колебаниями основания вокруг двух ортогональных осей

основания, равном  $(2k + 1)\pi/2$ ;  $(k = 1, 2, \dots)$ , что соответствует движению в пространстве третьей координатной оси основания по конусу. Поэтому получил широкое распространение так называемый C-тест, при котором основание совершает особое движение Coning, обеспечивающее коническое движение одной из осей основания [4]. Однако, детальное исследование приводит к выводу, что в ряде случаев (к примеру, при использовании в качестве уравнений ориентации не векторных уравнений) амплитудное значение дрейфа может наблюдаться и при других значениях сдвига фаз, в частности, при синфазных колебаниях, которым соответствуют "плоские" колебания третьей оси. Такое движение не может быть воспроизведено C-тестом. Однако, как показано в [1, 2], более удобным, простым и эффективным является так называемый V-тест, при котором основание совершает колебательное движение вокруг двух ортогональных своих осей (вибрационный тест). V-тест является более гибким, позволяя воспроизводить колебания основания с любым сдвигом фаз (включая коническое движение третьей оси), а также колебания с разными частотами вокруг двух осей [6 – 8].

Алгоритмы БИСО опираются на измерение в отдельные моменты времени, разделенные шагом опроса  $h$ , вектора  $\omega_k = \omega(t_k)$  (матрицы-столбца из проекций на оси связанной с основанием системы координат) угловой скорости основания, либо вектора  $\mathbf{q}_k$  приращений на шаге опроса так называемых квазиординат  $\mathbf{q}_k = \int_{t_k-h}^{t_k} \omega(t) dt$ . Назовем

$k$ -шаговым такой алгоритм, который использует

информацию об измеряемых величинах, полученные на  $k$  шагах опроса измерителей.

При этом можно выделить две группы многошаговых ( $k > 1$ ) алгоритмов: 1) алгоритмы, использующие информацию, полученную на  $k-1$  предыдущих шагах, и осуществляющие определение интегрируемой величины на следующем шаге опроса; шаг интегрирования  $H$  таких алгоритмов совпадает с шагом опроса  $h$  ( $H = h$ ); 2) алгоритмы, использующие измерительную информацию на следующих  $k$  шагах опроса и осуществляющие расчет интегрируемых величин через промежуток этих  $k$  шагов ( $H = kh$ ). Первая группа требует на начальном этапе проведения интегрирования на первых  $k-1$  шагах другими алгоритмами, т.е. осуществления "разгона". Поэтому их принято называть разгонными. Алгоритмы второй группы не требуют предварительного разгона, их называют безразгонными, "самостартующими".

Настоящая работа посвящена изучению амплитуд (максимальных по величине при изменении сдвига фаз) дрейфов погрешностей безразгонных алгоритмов.

#### Постановка задачи и схема программной модели

При V-тестировании предполагалось, что колебания по углам  $\vartheta$  и  $\varphi$  (рис. 1) совершаются по закону  $\psi(t) = 0$ ;  $\vartheta(t) = \vartheta_m \sin(\omega t + \varepsilon)$ ;  $\varphi(t) = \varphi_m \sin(\omega t)$ .

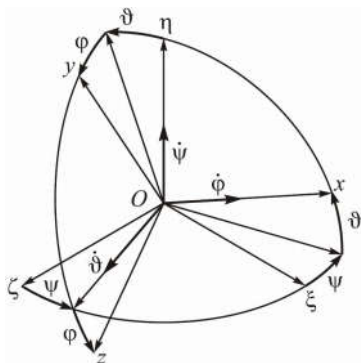


Рис. 1. Кинематика поворотов основания

Программную модель можно представить состоящей из следующих блоков:

1) блока имитатора основания, который осуществляет расчет "точных" (с точностью представления данных в используемой компьютерной системе) текущих значений углов ориентации, проекций угловой скорости основания и приращений квазиординат на текущем шаге опроса;

2) блока имитатора бортового вычислительного устройства; в нем производятся вычислительные операции в соответствии с исследуемым алгоритмом по вычислению текущих значений углов ориентации объекта по известным значени-

ям угловой скорости или приращений квазиординат, поступающим из блока имитатора движения основания;

3) блока вычисления погрешностей алгоритма; в нем сравниваются "точные" значения углов из блока имитатора основания с соответствующими значениями тех же углов, полученными из блока имитатора вычислительного устройства; там же осуществляется выведение графиков погрешностей в графическое окно монитора и вычисление значения скорости дрейфа погрешностей.

#### Цель исследования

С помощью V-тестирования выявить особенности зависимости амплитуд дрейфов различного рода безразгонных алгоритмов от шага опроса измерителей и сравнить точность этих алгоритмов.

#### Результаты предварительных исследований

Конечным результатом компьютерного моделирования является установление зависимости амплитуды дрейфов от шага опроса измерителей при различных значениях частоты колебаний и амплитуды угловых колебаний основания. Модельные исследования показали, что характер этих зависимостей практически не зависит от частоты и амплитуд, приводя лишь к изменению масштабов. При этом, если перейти от абсолютных величин дрейфов к изучению их отношения к величине  $\omega \vartheta_m \varphi_m$ , а в качестве аргумента принять не шаг опроса, а так называемый частотный параметр  $\mu = \omega \cdot h$ , т.е. изучать зависимость  $\delta(\mu)$ , где

$$\delta = \frac{\left| \frac{d(\Delta\psi)}{dt} \right|_{\max}}{\omega \vartheta_m \varphi_m},$$

то эти зависимости сохраняются неизменными при любых значениях параметров колебаний основания и шага опроса.

#### 1. Исследование алгоритмов интегрирования матричного уравнения ориентации Пуассона

Здесь представлены результаты исследования алгоритмов трех видов: 1) основанных на интегрировании уравнения Пуассона традиционными методами Рунге-Кутты; 2) основанных на методе Пикара с использованием измерений угловой скорости основания; 3) основанных на методе Пикара с использованием измерительной информации о приращении квазиординат.

##### 1.1. Алгоритмы методов Рунге-Кутты

Результаты прохождения этими алгоритмами V-теста представлены на рис. 2. Результаты модельных экспериментов можно аппроксимировать такими эмпирическими зависимостями (см. рис. 2)

$$\delta_{RK2} \approx 0,084 \cdot \mu^2; \delta_{RK3} \approx 0,169 \cdot \mu^3; \delta_{RK4} \approx 0,016 \cdot \mu^4.$$

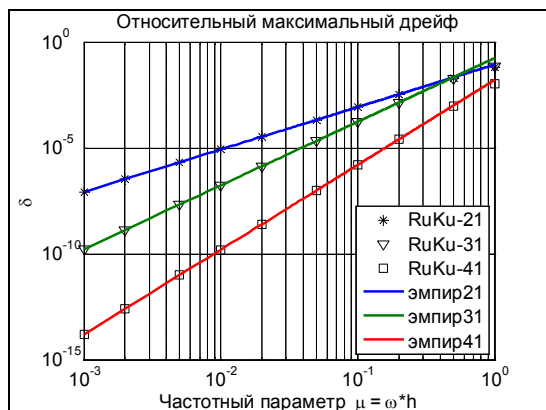


Рис. 2. Методы Рунге-Кутты

### 1.2. Алгоритмы методов Пикара

Алгоритмы методов Пикара состоят из двух групп: 1) алгоритмы, опирающиеся на измерения угловой скорости основания; 2) алгоритмы, основанные на измерении приращений квазиординат. Первая группа представлена в дальнейшем алгоритмами: Picar2mm второго порядка; Picar3mm третьего порядка; Picar4mm четвертого порядка. Вторая группа, использующая измерения квазиординат, включает алгоритмы: PicPsev2 второго порядка; PicPsev3 третьего порядка; PicPsev4 четвертого порядка.

#### 1.2.1. Измерение угловой скорости основания

Результаты V-тестирования трех алгоритмов этой группы приведены на рис. 3.

Экспериментальные графики удовлетворительно аппроксимируются такими эмпирическими зависимостями (см. рис. 3):

$$\delta_{PU2} \approx 0,165 \cdot \mu^2; \delta_{PU3} \approx 0,022 \cdot \mu^3; \delta_{PU4} \approx 0,03 \cdot \mu^4.$$

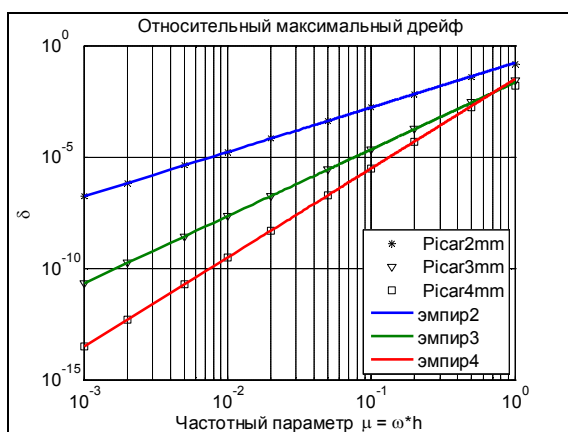


Рис. 3. Метод Пикара. Угловая скорость

#### 1.2.2. Измерение приращений квазиординат

В этой группе алгоритмов коэффициенты определяются по измеренным значениям приращений  $q_k$  квазиординат на  $k$ -том шаге опроса.

Результаты V-тестирования представлены на рис. 4, где приведены и графики эмпирических зависимостей, аппроксимирующих их

$$\delta_{PK2} \approx 0,082 \cdot \mu^2; \delta_{PK3} \approx 0,021 \cdot \mu^3; \delta_{PK4} \approx 0,004 \cdot \mu^4.$$

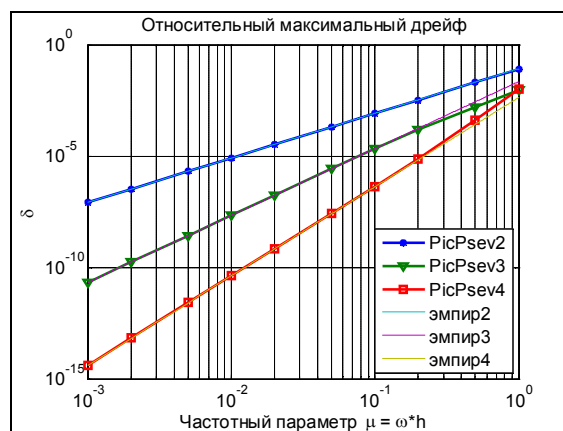


Рис. 4. Метод Пикара. Квазиординаты

## 2. Алгоритмы интегрирования векторных уравнений ориентации

Здесь представлены результаты исследования алгоритмов, основанных на использовании метода Пикара в применении его к векторному уравнению ориентации Эйлера.

### 2.1. Одношаговые алгоритмы

Рассмотрены свойства алгоритмов, описанных в [3] формулами (3.3.2), (3.3.7) и (3.3.13) на основе которых созданы процедуры Pan-2, Pan-7 и Pan-13. Кроме них представлен результат тестирования одношагового алгоритма alg11om на основе измерений вектора угловой скорости.

Результаты V-тестирования представлены графически на рис. 5.

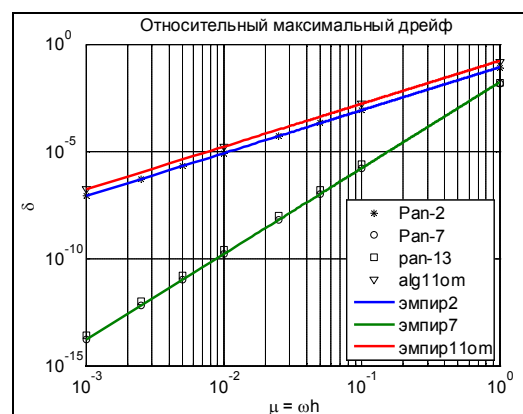


Рис. 5. Одношаговые алгоритмы

Из них следует вывод, что зависимости максимальных скоростей дрейфа погрешностей рассмотренных алгоритмов от частотного параметра удовлетворительно могут быть описаны формулами:

$$\delta_{11om} \approx 0,166 \cdot \mu^2; \delta_2 \approx 0,083 \cdot \mu^2;$$

$$\delta_1 \approx 0,0163 \cdot \mu^4; \delta_{13} \approx 0,0251 \cdot \mu^4.$$

**2.2. Двухшаговые алгоритмы**

Тестирование алгоритмов на основе формул (3.3.121) и (3.3.126) из [3, с. 178-179] показало, что они имеют второй порядок точности вместо анонсированного четвертого порядка. Если же изменить знаки перед последними слагаемыми правых частей этих формул, то получаются искомые алгоритмы четвертого порядка. Поэтому в качестве двухшаговых алгоритмов используем алгоритмы Pan-15 на основе формулы (3.3.15), Pan-121 на основе скорректированной формулы (3.3.121) и Pan-126 на основе исправленной формулы (3.3.126).

Кроме того, представим авторский алгоритм Nov, обеспечивающий расчеты по формуле

$$\begin{aligned} \Phi_{N+2} &= \frac{h}{3}(\omega_N + 4\omega_{N+1} + \omega_{N+2}) + \\ &+ \frac{h^2}{30}[9(\omega_{N+1} \times)(\omega_{N+2} - \omega_N) - (\omega_{N+2} \times)\omega_N], \end{aligned}$$

где  $\Phi_{N+2}$  – приращение вектора Эйлера (матрицы-столбца из проекций на оси связанной системы координаты) за время двух шагов опроса;  $\omega_N, \omega_{N+1}, \omega_{N+2}$  – векторы измеренной угловой скорости в начале шага интегрирования и в последующие моменты времени через шаг опроса; (x) здесь и далее обозначает кососимметричную матрицу, соответствующую вектору (матрице-столбцу) x.

Результат V-тестирования представлен на рис. 6.

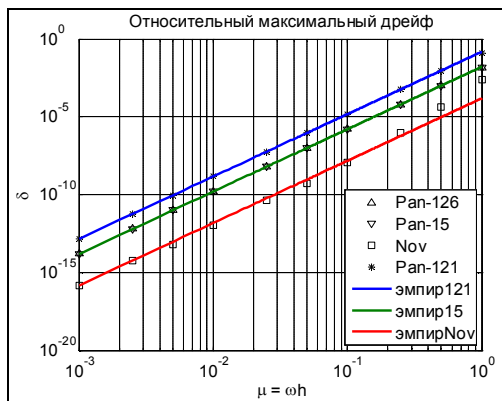


Рис. 6. Двухшаговые алгоритмы

На основе экспериментов зависимости дрейфа от частотного параметра можно аппроксимировать соотношениями:

$$\begin{aligned} \delta_{126} &\approx 0,148 \cdot \mu^4; \quad \delta_{15} \approx 0,0159 \cdot \mu^4; \\ \delta_{Nov} &\approx 0,00015 \cdot \mu^4; \quad \delta_{121} \approx 0,148 \cdot \mu^4. \end{aligned}$$

**2.3. Трехшаговые алгоритмы**

В [3] представлено несколько безразгонных трехшаговых алгоритмов, на основе которых созданы следующие процедуры их реализации в программной модели: Pan-16 – использует формулу (3.3.16), Pan-17 – формулу (3.3.17) и Pan-17-1 –

формулу (3.3.17'). Результаты V-тестирования этих трех алгоритмов приведены на рис. 7.

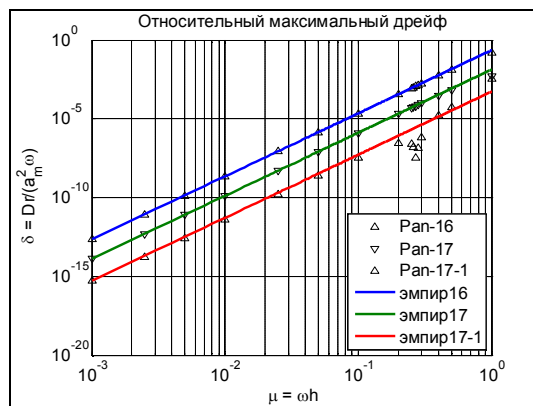


Рис. 7. Трехшаговые алгоритмы

Для представления исследуемой зависимости в рассмотренных трехшаговых алгоритмах можно использовать эмпирические формулы

$$\delta_{16} \approx 0,223 \cdot \mu^4; \quad \delta_{17} \approx 0,013 \cdot \mu^4; \quad \delta_{17-1} \approx 0,000523 \cdot \mu^4.$$

**2.4. Четырехшаговые алгоритмы**

Произведем тестирование алгоритмов, использующих вычисления по формулам (3.3.28), (3.3.37), (3.3.40), (3.3.42), (3.3.45) и (3.3.98) [3]. Для этого используем следующие процедуры: Pan-28, Pan-37, Pan-40, Pan-42, Pan-45K и Pan-98. Результаты представлены на рис. 8 и приближенно могут быть аппроксимированы одной степенной функцией

$$\delta_{28-98} \approx 0,00014 \cdot \mu^4.$$

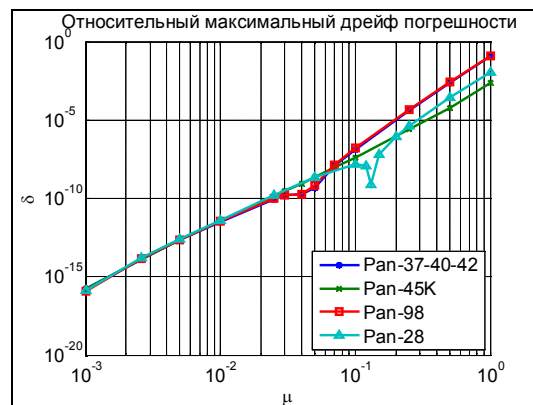


Рис. 8. Четырехшаговые алгоритмы

На рис. 9 приведены результаты тестирования пяти алгоритмов, исследованию погрешностей которых посвящена статья [5]. Приближенно зависимости дрейфов от частотного фактора можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta_{B1} &\approx 1,2 \cdot \mu^4; \quad \delta_{B2} \approx \delta_{B4} \approx 0,045 \cdot \mu^4; \\ \delta_{B3} &\approx \delta_{B5} \approx 0,0004 \cdot \mu^4. \end{aligned}$$

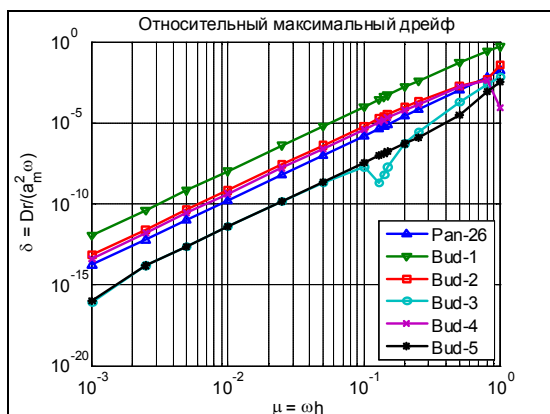


Рис. 9. Четырехшаговые алгоритмы из [3]

### 2.5. Пятишаговые алгоритмы

Далее рассмотрены четыре пятишаговых алгоритма, реализующие расчеты: 1) алгоритм Pan-51 по формуле (3.3.51), 2) алгоритм Pan-52 (3.3.52), 3) алгоритм Pan-54 (3.3.54) и 4) алгоритм Pan-58 (3.3.58) [3, с.161-162]. Алгоритм Pan-5N предлагается авторами

$$\varphi_{N+5} = \mathbf{q}_{N+1} + \mathbf{q}_{N+2} + \mathbf{q}_{N+3} + \mathbf{q}_{N+4} + \mathbf{q}_{N+5} + \frac{125}{192}(\mathbf{q}_{N+1} \times) \mathbf{q}_{N+5} + \frac{375}{96}(\mathbf{q}_{N+2} \times) \mathbf{q}_{N+4}.$$

Графики полученных экспериментальных зависимостей показаны на рис. 10. Аппроксимация трех из них может быть такой

$$\delta_{51} \approx 1,037 \cdot \mu^4; \delta_{52} \approx 3,098 \cdot \mu^4 \quad \delta_{5N} \approx 0,00307 \cdot \mu^4.$$

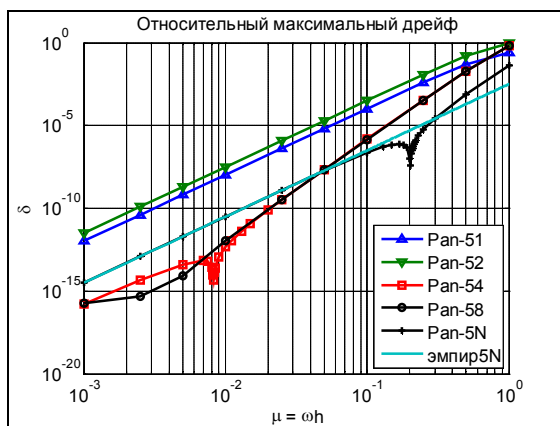


Рис. 10. Пятишаговые алгоритмы

### Выводы

1. Алгоритмы любого порядка, применяемые к векторным уравнениям, образуют максимальный по величине дрейф погрешности при коническом движении одной из осей основания. Алгоритмы четного порядка точности образуют дрейфы, амплитуды которых пропорциональны частотному параметру в степени, совпадающей с порядком точности алгоритма, а алгоритмы нечетного порядка – в степени на единицу большей порядка алгоритма.

2. Алгоритмы четного порядка для неекторных уравнений создают максимальные дрейфы

погрешности также при коническом движении, а в алгоритмах нечетного порядка максимальные дрейфы наблюдаются при плоских колебаниях оси. Показатель степени частотного параметра в зависимости от него дрейфа всегда совпадает с порядком точности алгоритма. Среди рассмотренных алгоритмов наибольшей точности достигает алгоритм PicPsev4 четвертого порядка, с относительным дрейфом погрешности  $\delta_{PK4} \approx 0,004 \cdot \mu^4$ .

3. Среди рассмотренных алгоритмов четвертого порядка для квазиординат наилучшей точностью обладает предложенный авторами двухшаговый алгоритм Nov с относительным дрейфом погрешности  $\delta_{Nov} \approx 0,00015 \cdot \mu^4$ . К нему приближаются по точности трехшаговый алгоритм Pan-17-1 ( $\delta_{17-1} \approx 0,00052 \cdot \mu^4$ ), алгоритмы 3 и 5 из [4] ( $\delta_{B3} \approx \delta_{B5} \approx 0,0004 \cdot \mu^4$ ), четырехшаговый алгоритм Pan-28 ( $\delta_{30} \approx 0,00056 \cdot \mu^4$ ). Из пятишаговых алгоритмов ближе всего к ним по точности стоит алгоритм Pan-5N ( $\delta_{5N} \approx 0,0031 \cdot \mu^4$ ), также предложенный авторами.

4. Алгоритм (3.3.45), объявленный в [3] как алгоритм шестого порядка на проверку оказался алгоритмом всего лишь второго порядка ( $\delta_{45} \approx 0,12 \cdot \mu^2$ ). Если же изменить значение коэффициента при последнем слагаемом в формуле (3.3.45) на 32/45 (алгоритм Pan-45K), то образуется алгоритм четвертого порядка точности (рис. 8). Алгоритм Pan-98, описанный как имеющий четвертый порядок, на деле при сравнительно больших частотах колебаний имеет шестой порядок точности.

5. Пятишаговые алгоритмы шестого порядка Pan-54 и Pan-58, обладая наилучшей точностью при медленных колебаниях основания, показывают наихудшую среди рассмотренных алгоритмов точность при частоте этих колебаний, близких к частоте опроса измерителей [6].

6. V-тестирование алгоритмов зарекомендовало себя как удобное, простое и эффективное средство анализа точности проектируемых алгоритмов БИСО.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на повышение точности алгоритмов с помощью применения новых методов аппроксимации вектора угловой скорости.

### Литература

1. Слюсарь В. М. Актуальные вопросы проектирования алгоритмов ориентации БИНС. Ч. 1. Амплитудное расширение области применения алгоритмов / В. М. Слюсарь. // Гироскопия и навигация. – 2006. – №2. – С. 61 – 75.
2. Слюсарь В. М. Актуальные вопросы проектирования алгоритмов ориентации БИНС. Часть 2: Частотное расширение области применения алгоритмов

мов / В. М. Слюсарь. // Гирокоспия и навигация. – 2006. – № 3. – С. 51 – 64.

3. Панов А. П. Математические основы теории инерциальной ориентации / А. П. Панов. – Київ: Наукова думка, 1995. – 280 с.

4. Paul G. Savage. "Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 1 (1998), pp. 19 – 28.

5. Буденный М. Ф. Об автоматизированном проектировании системы программно-аппаратных средств на базе гиперкомплексных чисел для задач ориентации твердого тела. Ч. 2. / М. Ф. Буденный, Я. Ф. Калиновский, А. П. Панов, А. И. Петренко, Т. Г. Постникова, М. В. Синьков, Т. В. Синькова // Реєстрація, зберігання і обробка даних, 2002, Е. 4, № 4. – С. 77 – 85.

6. Аксененко П. М. Результаты V-тестирования точности безразгонных алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации / П. М. Аксененко, Ю. Ф. Лазарев, С. А. Мураховский // X Международная научно-техническая конференция "Гиротехнологии, навигация, управление движением и конструированы авиационно-космической техники". Сборник докладов – м. Київ, 2015. – С. 475 – 482.

7. Лазарев Ю. Ф. Об одном алгоритме БИСО, минимизирующем дрейф погрешности численного интегрирования / Ю. Ф. Лазарев, С. А. Мураховский // Вісник НТУУ "КПІ". Серія Приладобудування. – 2015. – Вип. 50(2) – С. 40 – 46.

8. Лазарев Ю. Ф. Рациональная форма представления характеристик точности алгоритмов БИСО / Ю. Ф. Лазарев, П. М. Аксененко // XIV науково-технічна конференція "ПРИЛАДОБУДУВАННЯ: стан і перспективи". Збірка тез доповідей, – НТУУ "КПІ", – м. Київ, 2015. – С. 34 – 35.

УДК 681.3

**Ю. Ф. Лазарев, П. М. Аксененко, С. А. Мураховський**

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна*

#### ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ АЛГОРИТМІВ БІСО

Розглядаються питання порівняння точності відомих алгоритмів бесплатформенних інерціальних систем орієнтації (БІСО) за допомогою комп'ютерного V-тестування. Запропоновано спосіб узагальненого представлення залежності дрейфу похибки алгоритму від кроку опитування вимірювачів у вигляді безрозмірних величин. Досліджено вплив на точність алгоритму величини кроку опитування типу рівняння, що інтегрується, виду алгоритму, кількості кроків опитування в одному кроці інтегрування. Запропоновано два алгоритми з точністю принаймні на порядок більшою, ніж у відомих алгоритмів. Зроблено висновки про ефективність V-тестування для аналізу точності алгоритмів.

**Ключові слова:** бесплатформенна інерціальна система орієнтації, алгоритм, точність, комп'ютерне моделювання.

**Yu. F. Lazarev, P. N. Aksonenko, S. A. Murakhovsky**

*National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine*

#### RESEARCH THE ACCURACY OF ALGORITHMS OF STRAPDOWN INERTIAL ORIENTATION SYSTEMS

The problems of comparing the accuracy of known algorithms of strapdown inertial orientation systems by computer V-test. A method according to the generalized representation of the drift error of the algorithm from step survey sensors in the form of dimensionless quantities. The effect on the accuracy of the algorithm step size survey type integrable equation, the type of algorithm, the number of polling steps in one step of integration. Two algorithms are proposed with precision at least an order of magnitude greater than that of known algorithms. The conclusions on the effectiveness of V-test for the analysis of the accuracy of the algorithms.

**Keywords:** strapdown inertial orientation system, algorithm, accuracy, computer simulation.

*Надійшла до редакції  
28 жовтня 2016 року*

*Рецензовано  
11 листопада 2016 року*

© Лазарев Ю. Ф., Аксененко П. М., Мураховский С. А., 2016