

УДК 531.534

**А. В. Борейко, К. В. Чередниченко, П. М. Бондарь***Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина***ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УПРУГИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ВИБРОУСТОЙЧИВОСТИ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ**

Рассмотрена возможность повышения устойчивости к механическим воздействиям микромеханических гироскопов LL типа, построенных по дифференциальной схеме, за счет использования общих отрицательных обратных связей по сумме выходных сигналов. Показано, что такая схема эквивалентна схеме с упругой механической связью, создаваемой дополнительным рычажным механизмом, обеспечивающим кинематическую связь рамок двух чувствительных элементов. Разработана и проанализирована математическая модель микромеханического гироскопа с учетом механической связи в условиях вибрационных воздействий и постоянных ускорений. Доказано, что в исследуемой схеме для снижения чувствительности к вибрациям реализуется метод разнесения частот синфазных и противофазных колебаний инерционных масс в упругом подвесе.

**Ключевые слова:** микромеханический гироскоп, чувствительный элемент, виброустойчивость, угловая скорость, линейное ускорение.

**A. V. Boreyko, E. V. Cherednychenko, P. M. Bondar***National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine***APPLICATION OF ELASTIC MECHANICAL CONNECTION FOR INCREASING VIBRATION RESISTANCE MICROMECHANICAL GYROSCOPE**

The possibility of increasing resistance to mechanical stress micromechanical gyroscopes LL type, constructed by a differential circuit, through the use of common negative feedbacks on the sum of the output signals. It has been shown that such a scheme is equivalent to the circuit with an elastic mechanical linkage, create additional lever mechanism, providing a kinematic connection framework two sensing elements. Developed and analyzed a mathematical model micromechanical gyroscope taking into account the mechanical connection in the conditions vibration effects and constant acceleration. It is proved that in the study scheme to reduce sensitivity to vibration implemented method diversity frequency phase and antiphase oscillations of the inertial mass in an elastic suspension.

**Keywords:** micromechanical gyroscope, sensing element, vibration resistance, angular velocity, linear acceleration.

*Надійшла до редакції  
17 лютого 2016 року*

*Рецензовано  
02 березня 2016 року*

© Борейко А. В., Чередниченко К. В., Бондар П. М., 2016

УДК 531.76

**СИНТЕЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМОВ БИСО НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА***Лазарев Ю. Ф., Сандий А. А.**Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина**E-mail: [aellalaz@gmail.com](mailto:aellalaz@gmail.com), [asandiy@ukr.net](mailto:asandiy@ukr.net)*

*Синтезированы алгоритмы различных приближений для определения параметров ориентации в бесплатформенной инерциальной системе ориентации (БИСО), входящей в состав бесплатформенной инерци-*

альной навигационной системы (БИНС). Компьютерным моделированием исследованы основные характеристики погрешностей и даны рекомендации по применению алгоритмов.

Использование матричного уравнения Пуассона в бесплатформенной инерциальной системе навигации имеет определенные преимущества, – не требуются дополнительные преобразования для перепроецирования вектора ускорения из связанной в земную систему координат, а определение ориентации основания опирается только на операции с матрицами.

**Ключевые слова:** синтез алгоритмов, матричное уравнение Пуассона, вектор ускорения.

### Постановка проблемы

Нахождение аналитического решения дифференциального уравнения ориентации требует знания зависимости вектора угловой скорости основания как функции времени в рассматриваемом промежутке (шаге) интегрирования. Такое знание в БИНСО недоступно, поскольку измерение угловой скорости (или интегралов от нее (квазиординат)) происходит дискретно в моменты времени, разделенные шагом опроса измерителей. Поэтому первой задачей на пути построения аналитического решения является аппроксимация вектора угловой скорости как функции времени на основе известных (измеренных) значений этого вектора в некоторых моментах времени.

### Анализ научных исследований и публикаций

Известно, что наиболее опасным с точки зрения алгоритмических погрешностей БИНСО является движение основания, при котором оно совершает синхронные колебания вокруг двух ортогональных своих осей [2]. В этом случае появляется постоянная составляющая скорости изменения погрешности (дрейф) определения угла поворота вокруг третьей ортогональной оси. При наличии дрейфа погрешность определения этого угла неограниченно возрастает со временем и по истечении нескольких минут начинает преобладать над всеми остальными видами алгоритмических ошибок. Поэтому в качестве основной характеристики точности алгоритмов рационально принять максимально возможную величину дрейфа алгоритма при варьировании сдвигом фаз между колебаниями основания вокруг двух осей [1].

### Синтез алгоритмов

Синтез состоит в получении алгоритма численного решения матричного дифференциального уравнения:

$$\frac{dC}{dt} = C(\omega \times), \quad (1)$$

где  $C$  – матрица направляющих косинусов между осями связанной и опорной систем координат;  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]$  – вектор (матрица-столбец из проекций на оси связанной системы координат) угловой скорости основания;

$$(\omega \times) = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

При этом информация об угловой скорости  $\omega$  поступает в дискретные моменты времени  $t_i (i=1, 2, \dots)$  с интервалами  $h$  шага опроса измерителей (т. е.  $t_i - t_{i-1} = h$ ) либо в виде мгновенных значений проекций угловой скорости  $\omega_j(t_i)$ , ( $j=1, 2, 3$ ), либо в виде приращений квазиординат  $q_j(t_i)$  (при использовании интегрирующих гироскопов)

$$q_j(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega_j(\tau) d\tau. \quad \text{В дальнейшем используется}$$

также обозначение  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]$  вектора (матрицы-столбца из проекций на оси связанной системы координат) приращений квазиординат.

### Алгоритмы метода Пикара

Рассмотрим алгоритм нахождения значения матрицы направляющих косинусов  $C_{n+k} = C(t_{n+k})$  в момент времени  $t = t_{n+k} = t_n + kh$  по заданному ее значению  $C_n = C(t_n)$  в предыдущий момент времени  $t = t_n$ , где  $h$  – шаг опроса измерителей.

Решение уравнения (1) отыскивается в виде  $C_{n+k} = C_n \cdot P_{n+k}$ , причем  $P_{n+k}$  является решением уравнения

$$P(t) = E + \int_{t_n}^t P(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi, \quad (2)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\xi = \frac{\tau}{h}$ , в момент времени  $t = t_{n+k} = t_n + kh$ .

Уравнение (2) по методу Пикара решается последовательными приближениями.

### Одношаговые алгоритмы

Приведем результаты синтеза одношаговых алгоритмов для случая квазиординат (табл. 1 – 2).

### Двухшаговые алгоритмы

Двухшаговые алгоритмы относятся к многошаговым алгоритмам, поэтому следует рассмотреть две их разновидности – разгонные и безразгонные (табл. 3 – 6).

Таблиця 1. Результати синтезу одношагових алгоритмів

1. Алгоритм РПК1h1 первого приближения:	$P_{n+1} = E + (\mathbf{q}_1 \times)$
2. Алгоритм РПК1h2 второго приближения:	$P_{n+1} = E + (\mathbf{q}_1 \times) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_1 \times)(\mathbf{q}_1 \times)$
3. Алгоритм РПК1h3 третьего приближения:	$P_{n+1} = E + \left(1 - \frac{1}{6}q_1^2\right)(\mathbf{q}_1 \times) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_1 \times)(\mathbf{q}_1 \times)$
4. Алгоритм РПК1h4 четвертого приближения:	$P_{n+1} = E + \left(1 - \frac{1}{6}q_1^2\right)(\mathbf{q}_1 \times) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{12}q_1^2\right)(\mathbf{q}_1 \times)(\mathbf{q}_1 \times)$

Таблиця 2. Результати синтезу одношагових алгоритмів при измерении угловой скорости

1. Алгоритм РПУ1h1 первого приближения:	$P_{n+1} = E + \frac{h}{2}[(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_0) \times]$
2. Алгоритм РПУ1h2 второго приближения:	$P_{n+1} = E + \frac{h}{2}[(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_0) \times] + \frac{h^2}{24} \left[ 3(\boldsymbol{\omega}_1 \times)^2 + 3(\boldsymbol{\omega}_0 \times)^2 + 5(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\boldsymbol{\omega}_1 \times) + (\boldsymbol{\omega}_1 \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right]$
3. Алгоритм РПУ1h3 третьего приближения:	$P_{n+1} = E + \frac{h}{2}[(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_0) \times] + \frac{h^2}{24} \left[ 12(\boldsymbol{\omega}_0 \times)^2 + 4 \left[ 2(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{D} \times) + (\mathbf{D} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right] + 3(\mathbf{D} \times)^2 \right] +$ $+ \frac{h^3}{240} \left\{ -40\boldsymbol{\omega}_0^2 (\boldsymbol{\omega}_0 \times) + 10 \left[ 2(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{D} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times) + (\mathbf{D} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times)^2 + 3(\boldsymbol{\omega}_0 \times)^2 (\mathbf{D} \times) \right] + \right.$ $\left. + 2 \left[ 3(\mathbf{D} \times)^2 (\boldsymbol{\omega}_0 \times) + 8(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{D} \times)^2 + 4(\mathbf{D} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{D} \times) \right] - 5D^2 (\mathbf{D} \times) \right\}, \mathbf{D} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_0$

Таблиця 3. Двухшаговые разгонные алгоритмы (квазиординаты)

1. Алгоритм РПК2h1 первого приближения:	$P_{n+1} = E + (\mathbf{q}_1 \times)$
2. Алгоритм РПК2h2 второго приближения:	$P_{n+1} = E + (\mathbf{q}_1 \times) + \frac{1}{8}[(\mathbf{b} \times)^2 + (\mathbf{c} \times)^2] + \frac{1}{12} \{ 2(\mathbf{b} \times)(\mathbf{c} \times) + (\mathbf{c} \times)(\mathbf{b} \times) \},$ где $\mathbf{b} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0$ ; $\mathbf{c} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0$ .
3. Алгоритм РПК3h2 третьего приближения:	$P_{n+1} = E + (\mathbf{q}_1 \times) + \frac{1}{8}[(\mathbf{b} \times)^2 + (\mathbf{c} \times)^2] + \frac{1}{12} \{ 2(\mathbf{b} \times)(\mathbf{c} \times) + (\mathbf{c} \times)(\mathbf{b} \times) \} - \frac{1}{48} [b^2 (\mathbf{b} \times) + c^2 (\mathbf{c} \times)] +$ $+ \frac{1}{32} (\mathbf{b} \times)^2 (\mathbf{c} \times) + \frac{1}{80} (\mathbf{c} \times)^2 (\mathbf{b} \times) + \frac{1}{480} [2(\mathbf{b} \times)(\mathbf{c} \times) + (\mathbf{c} \times)(\mathbf{b} \times)] [5(\mathbf{b} \times) + 8(\mathbf{c} \times)]$

Таблиця 4. Двухшаговые разгонные алгоритмы (угловая скорость)

1. Алгоритм РПУ2h1 первого приближения:	$P_{n+1} = E + h \left\{ (\boldsymbol{\omega}_0 \times) + \frac{1}{4}(\mathbf{E} \times) + \frac{1}{6}(\mathbf{A} \times) \right\},$ где $\mathbf{E} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_{-1}$ ; $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}_1 - 2\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{-1}$ .
2. Алгоритм РПУ2h2 второго приближения	$P_{n+1} = E + h \left\{ (\boldsymbol{\omega}_0 \times) + \frac{1}{4}(\mathbf{E} \times) + \frac{1}{6}(\mathbf{A} \times) \right\} + h^2 \left\{ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)^2 + \frac{1}{12} \left[ 2(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{E} \times) + (\mathbf{E} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right] \right.$ $\left. + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{A} \times) + \frac{1}{8}(\mathbf{E} \times)^2 + \frac{1}{6}(\mathbf{A} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right] + \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{8}(\mathbf{E} \times)(\mathbf{A} \times) + \frac{1}{12}(\mathbf{A} \times)(\mathbf{E} \times) \right] + \frac{1}{72}(\mathbf{A} \times)^2 \right\}$

Таблиця 5. Двухшаговые разгонные алгоритмы (квазиординаты)

1. Алгоритм РПКВ2h1 первого приближения:	$P_{n+2} = E + (\mathbf{q}_1 \times) + (\mathbf{q}_2 \times).$
2. Алгоритм РПК2h2 второго приближения:	$P_{n+2} = E + (\mathbf{q}_1 \times) + (\mathbf{q}_2 \times) + \frac{1}{2}(\mathbf{d} \times)^2 + \frac{4}{3}[(\mathbf{d} \times)(\mathbf{e} \times) + 2(\mathbf{e} \times)(\mathbf{d} \times)],$

	где $\mathbf{d} = 3\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$ ; $\mathbf{e} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$ .
3. Алгоритм РПК3h2 третьего приближения:	
$P_{n+2} = E + (\mathbf{q}_1 \times) + (\mathbf{q}_2 \times) + \frac{1}{2}(\mathbf{d} \times)^2 + \frac{4}{3}[(\mathbf{d} \times)(\mathbf{e} \times) + 2(\mathbf{e} \times)(\mathbf{d} \times)] + \frac{1}{6}\{(\mathbf{d} \times)^3 + (\mathbf{d} \times)^2(\mathbf{e} \times) + [2(\mathbf{d} \times)(\mathbf{e} \times) + (\mathbf{e} \times)(\mathbf{d} \times)](\mathbf{d} \times) + \frac{16}{5}[2(\mathbf{d} \times)(\mathbf{e} \times) + (\mathbf{e} \times)(\mathbf{d} \times)](\mathbf{e} \times) + \frac{12}{5}(\mathbf{e} \times)(\mathbf{d} \times)^2 + 8(\mathbf{e} \times)(\mathbf{d} \times)(\mathbf{e} \times)\}$	

Таблица 6. Двухшаговые безразгонные алгоритмы (угловая скорость)

1. Алгоритм РПКВР2h1 первого приближения:	$P_{n+2} = E + h \left\{ 2(\boldsymbol{\omega}_0 \times) + (\mathbf{O} \times) + \frac{4}{3}(\mathbf{S} \times) \right\},$ <p>где <math>\mathbf{O} = 4\boldsymbol{\omega}_1 - 3\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_2</math>; <math>\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_0 - 2\boldsymbol{\omega}_1</math>.</p>
2. Алгоритм РПК2h2 второго приближения:	
$P_{n+2} = E + h \left\{ 2(\boldsymbol{\omega}_0 \times) + (\mathbf{O} \times) + \frac{4}{3}(\mathbf{S} \times) \right\} + h^2 \left\{ 2(\boldsymbol{\omega}_0 \times)^2 + \frac{2}{3}[2(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{O} \times) + (\mathbf{O} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times)] + 4 \left[ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{S} \times) + \frac{1}{8}(\mathbf{O} \times)^2 + \frac{1}{6}(\mathbf{S} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right] + \frac{32}{5} \left[ \frac{1}{8}(\mathbf{O} \times)(\mathbf{S} \times) + \frac{1}{12}(\mathbf{S} \times)(\mathbf{O} \times) \right] + \frac{8}{9}(\mathbf{S} \times)^2 \right\}$	

**Трехшаговые алгоритмы**

Таблица 7. Трехшаговые разгонные алгоритмы (квазикоординаты)

1. Формула алгоритма РПКР3h1 первого приближения имеет вид:	$P_{n+1} = E + (\mathbf{q}_1 \times).$
2. Второе приближение приводит к алгоритму РПКР3h2 вида:	
$P_{n+1} = E + (\mathbf{q}_1 \times) + \frac{1}{72}(\mathbf{O} \times)^2 + \frac{1}{18}(\mathbf{O} \times)(\mathbf{E} \times) + \frac{1}{48}(\mathbf{O} \times)(\mathbf{A} \times) + \frac{1}{36}(\mathbf{E} \times)(\mathbf{O} \times) + \frac{1}{8}(\mathbf{E} \times)^2 + \frac{1}{20}(\mathbf{E} \times)(\mathbf{A} \times) + \frac{1}{144}(\mathbf{A} \times)(\mathbf{O} \times) + \frac{1}{30}(\mathbf{A} \times)(\mathbf{E} \times) + \frac{1}{72}(\mathbf{A} \times)^2$ <p>где обозначено <math>\mathbf{O} = 2\mathbf{q}_1 + 5\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1}</math>; <math>\mathbf{E} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0</math>; <math>\mathbf{A} = \mathbf{q}_1 - 2\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_{-1}</math>.</p>	

Таблица 8. Трехшаговые разгонные алгоритмы (угловая скорость)

1. Алгоритм РПУР3h1 первого приближения:	$P_{n+1} = E + h \left\{ (\boldsymbol{\omega}_0 \times) + \frac{1}{12}(\mathbf{O} \times) + \frac{1}{6}(\mathbf{S} \times) + \frac{1}{24}(\mathbf{T} \times) \right\},$ <p>где <math>\mathbf{O} = 2\boldsymbol{\omega}_1 + 3\boldsymbol{\omega}_0 - 6\boldsymbol{\omega}_{-1} + \boldsymbol{\omega}_{-2}</math>; <math>\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega}_1 - 2\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{-1}</math>; <math>\mathbf{T} = \boldsymbol{\omega}_1 - 3\boldsymbol{\omega}_0 + 3\boldsymbol{\omega}_{-1} - \boldsymbol{\omega}_{-2}</math>.</p>
2. Алгоритм РПУР3h2 второго приближения:	
$P = E + h \left\{ (\boldsymbol{\omega}_0 \times) + \frac{1}{12}(\mathbf{O} \times) + \frac{1}{6}(\mathbf{S} \times) + \frac{1}{24}(\mathbf{T} \times) \right\} + h^2 \left\{ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)^2 + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{6}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{O} \times) + \frac{1}{12}(\mathbf{O} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right] + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{S} \times) + \frac{1}{72}(\mathbf{O} \times)^2 + \frac{1}{6}(\mathbf{S} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right] + \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{6}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{T} \times) + \frac{1}{24}(\mathbf{T} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times) + \frac{1}{24}(\mathbf{O} \times)(\mathbf{S} \times) + \frac{1}{36}(\mathbf{S} \times)(\mathbf{O} \times) \right] + \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{72}(\mathbf{O} \times)(\mathbf{T} \times) + \frac{1}{144}(\mathbf{T} \times)(\mathbf{O} \times) + \frac{1}{12}(\mathbf{S} \times)^2 \right] + \frac{1}{7} \left[ \frac{1}{36}(\mathbf{S} \times)(\mathbf{T} \times) + \frac{1}{48}(\mathbf{T} \times)(\mathbf{S} \times) \right] + \frac{1}{8 \cdot 144}(\mathbf{T} \times)^2 \right\}$	

Таблица 9. Трехшаговые безразгонные алгоритмы (квазикоординаты)

1. Алгоритм РПКВР3h1 первого приближения:	$P_{n+3} = E + (\mathbf{q}_1 \times) + (\mathbf{q}_2 \times) + (\mathbf{q}_3 \times)$
2. Алгоритм РПКВР3h2 второго приближения:	
$P_{n+3} = E + (\mathbf{q}_1 \times) + (\mathbf{q}_2 \times) + (\mathbf{q}_3 \times) + \frac{1}{8}(\mathbf{O} \times)^2 + \frac{3}{2}(\mathbf{O} \times)(\mathbf{E} \times) + \frac{3}{4}(\mathbf{E} \times)(\mathbf{O} \times) + \frac{3}{5} \left[ 3(\mathbf{O} \times)(\mathbf{A} \times) + 16(\mathbf{E} \times)^2 + (\mathbf{A} \times)(\mathbf{O} \times) \right] + \frac{81}{20} \left[ 3(\mathbf{E} \times)(\mathbf{A} \times) + 2(\mathbf{A} \times)(\mathbf{E} \times) \right] + \frac{81}{8}(\mathbf{A} \times)^2$ <p>(<math>\mathbf{O} = 2\mathbf{q}_3 - 7\mathbf{q}_2 + 11\mathbf{q}_1</math>; <math>\mathbf{E} = 3\mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3</math>; <math>\mathbf{A} = \mathbf{q}_3 - 2\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1</math>).</p>	

Таблиця 10. Трехшаговые безразгонные алгоритмы (угловая скорость)

1. Алгоритм PPUBR3h1 первого приближения:	$P_{n+3} = E + 3h \left\{ (\omega_0 \times) + \frac{1}{4} (\mathbf{O} \times) + \frac{3}{2} (\mathbf{S} \times) + \frac{9}{8} (\mathbf{T} \times) \right\};$ $(\mathbf{O} = 2\omega_3 - 9\omega_2 + 18\omega_1 - 11\omega_0; \mathbf{S} = 4\omega_2 - 5\omega_1 + 2\omega_0 - \omega_3;$ $\mathbf{T} = \omega_3 - 3\omega_2 + 3\omega_1 - \omega_0).$
2. Алгоритм PPUBR3h2 второго приближения:	$P_{n+3} = E + 3h \left\{ (\omega_0 \times) + \frac{1}{4} (\mathbf{O} \times) + \frac{3}{2} (\mathbf{S} \times) + \frac{9}{8} (\mathbf{T} \times) \right\} + 9h^2 \left\{ \frac{1}{2} (\omega_0 \times)^2 + \frac{1}{6} (\omega_0 \times) (\mathbf{O} \times) + \frac{1}{12} (\mathbf{O} \times) (\omega_0 \times) + \right.$ $+ \frac{9}{4} \left[ \frac{1}{2} (\omega_0 \times) (\mathbf{S} \times) + \frac{1}{6} (\mathbf{S} \times) (\omega_0 \times) + \frac{1}{144} (\mathbf{O} \times)^2 \right] + \frac{27}{5} \left[ \frac{1}{6} (\omega_0 \times) (\mathbf{T} \times) + \frac{1}{24} (\mathbf{T} \times) (\omega_0 \times) + \frac{1}{24} (\mathbf{O} \times) (\mathbf{S} \times) + \frac{1}{36} (\mathbf{S} \times) (\mathbf{O} \times) \right]$ $\left. + \frac{27}{2} \left[ \frac{1}{72} (\mathbf{O} \times) (\mathbf{T} \times) + \frac{1}{144} (\mathbf{T} \times) (\mathbf{O} \times) + \frac{1}{12} (\mathbf{S} \times)^2 \right] + \frac{253}{7} \left[ \frac{1}{36} (\mathbf{S} \times) (\mathbf{T} \times) + \frac{1}{48} (\mathbf{T} \times) (\mathbf{S} \times) \right] + \frac{81}{128} (\mathbf{T} \times)^2 \right\}$

**Исследование точности**

Исследование точности приведенных алгоритмов производилось по компьютерным моделям, воспроизводящим работу БИСО.

Вначале для каждого алгоритма и фиксированного значения безразмерного шага проводился ряд экспериментов с изменением сдвига фаз. Определялся тот сдвиг фаз, при котором наблюдался наибольший по величине дрейф. Осуществлялось моделирование при этом сдвиге фаз при нескольких значениях безразмерного шага опроса в диапазоне от 1 до 0,001 и фиксировались соответствующие абсолютные величины этого относительного дрей-

фа. Построены в логарифмическом масштабе графики зависимости максимального дрейфа алгоритма от шага опроса (в безразмерных величинах [1]).

**Алгоритмы метода Пикара****Одношаговые алгоритмы**

На рис. 1 представлены графики экспериментальных (по компьютерной модели) зависимостей относительных максимальных дрейфов от безразмерного шага опроса для рассмотренных семи алгоритмов.

Результаты аппроксимации этих зависимостей степенной функцией представлены в табл. 11.

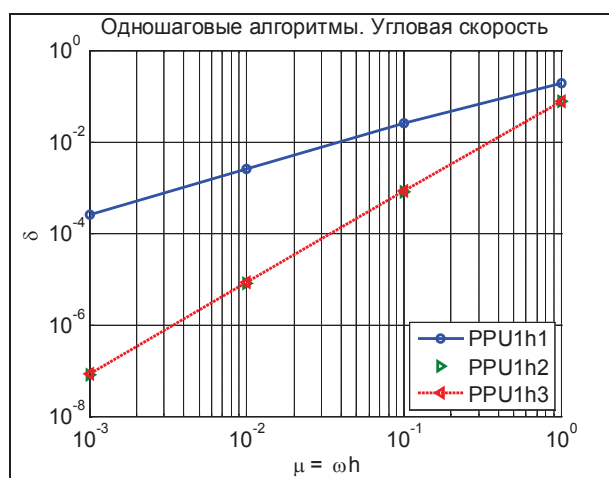
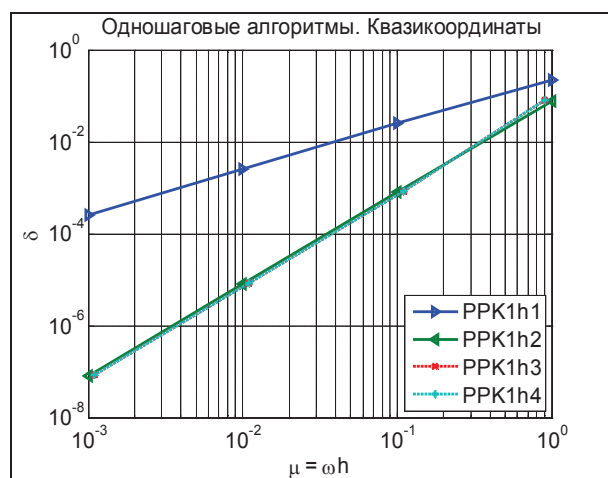


Рис. 1. Одношаговые алгоритмы метода Пикара

Из них следует, что алгоритмы одинаковых приближений имеют практически одинаковую точность по дрейфам, причем алгоритмы первого приближения имеют первый, а алгоритмы последующих приближений – второй порядок точности. При этом максимальный по величине дрейф погрешности алгоритмов первого приближения возникает при сдвиге фаз между колебаниями основания  $k\pi$ , а в остальных трех алгоритмах – при сдвиге фаз  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , где  $k$  целое число.

Таблица 11. Параметры точности одношаговых алгоритмов метода Пикара

Алгоритм	Изм. величина	$N$	$k$
PPK1h1	$\omega$	1	0,25
PPU1h1	$\omega$	1	0,25
PPK1h2	$\omega$	2	0,082
PPU1h2	$\omega$	2	0,082
PPK1h3	$\omega$	2	0,083
PPU1h3	$\omega$	2	0,083
PPK1h4	$\omega$	2	0,083

Более точными являются алгоритмы второго приближения, поэтому их следует признать предпочтительными для использования, как самые точные и простые. Алгоритмы второго приближения имеют ту же точность, что и алгоритм RuKu21h, но требуют значительно меньше вычислительных операций, особенно алгоритм PPK1h2, опирающийся на измерение приращений квазиординат.

**Двухшаговые алгоритмы**

Результаты исследований точности двухшаговых алгоритмов показаны на рис. 2, а параметры точности в табл. 12 и 13.

Наилучшим по точности из исследованных двухшаговых алгоритмов является разгонный алгоритм PPKR2h3 третьего приближения.

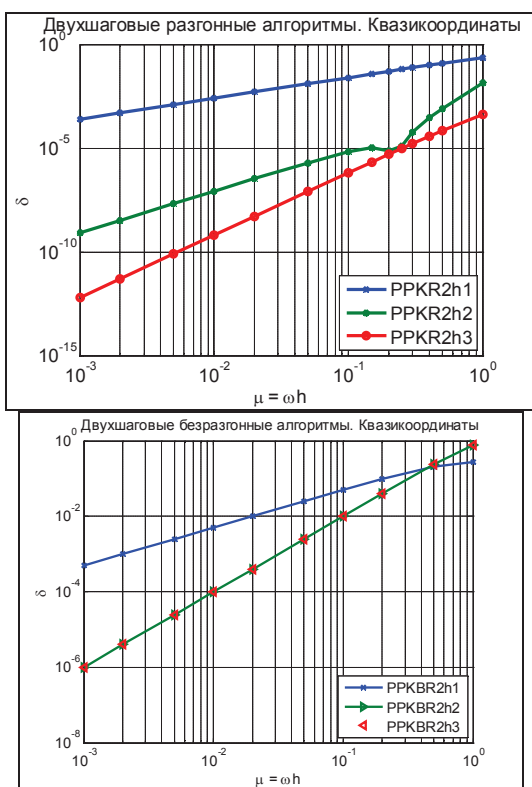


Рис. 2. Двухшаговые алгоритмы метода Пикара

Наилучшей точностью среди исследованных трехшаговых алгоритмов обладает алгоритм PPUR3h2. Максимальный дрейф его погрешности более чем на порядок меньше дрейфов ближайших по точности алгоритмов PPKRB3h2 и PPUBR3h2.

**Выводы**

1. Получены точностные характеристики ряда одношаговых, двухшаговых и трехшаговых алгоритмов, построенных на основе уравнения ориентации Пуассона.

Таблица 12. Параметры точности двухшаговых разгонных алгоритмов метода Пикара

Алгоритм	Кол-во шагов опроса в шаге интегр.	Изм. вел.	N	k
PPKR2h1	1	q	1	0,25
PPUR2h1	1	ω	1	0,5
PPKR2h2	1	q	2	8,32·10 <sup>-4</sup>
PPUR2h2	1	ω	2	3,33·10 <sup>-3</sup>
PPKR2h3	1	q	3	6,24·10 <sup>-4</sup>

**Трехшаговые алгоритмы**

Исследование точности трехшаговых алгоритмов метода Пикара приводит к результатам, изображенным на графиках рис. 3, что позволяет аппроксимировать зависимости степенными функциями с параметрами, указанными в табл. 14.

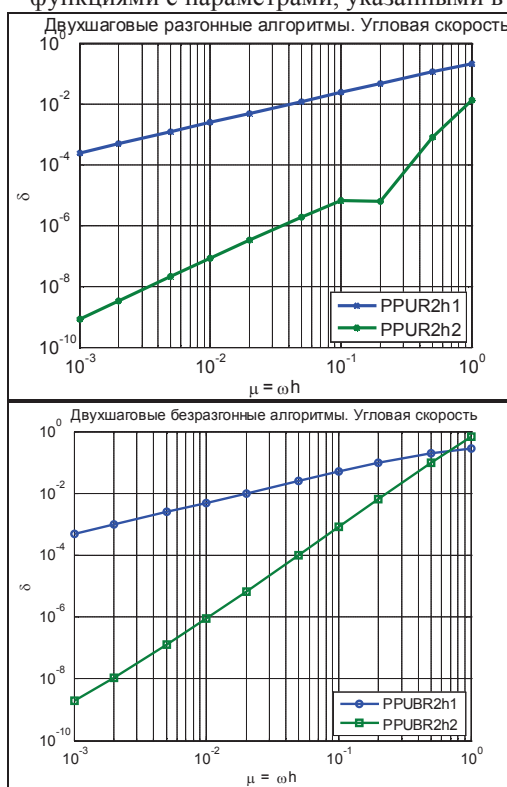


Таблица 13. Параметры точности двухшаговых безразгонных алгоритмов метода Пикара

Алгоритм	Кол-во шагов опроса в шаге интегр.	Изм. вел.	N	k
PPKBR2h1	2	q	1	0,5
PPUBR2h1	2	ω	1	0,5
PPKBR2h2	2	q	2	1,0
PPUBR2h2	2	ω	3	0,68
PPKBR2h3	2	q	2	1,0

2. Наилучшей точностью среди всех рассмотренных алгоритмов обладает алгоритм RuKu42h, реализующий "стандартный" метод Рунге-Кутты [3].
3. Среди алгоритмов метода Пикара наилучшую точность показывает разгонный двухшаговый алгоритм PPKR2h3 третьего приближения.
4. В целом разгонные алгоритмы точнее безразгонных, но безразгонные требуют меньше операций на шаг опроса, т. е являются более быстрыми.
5. Полученные результаты и методика их получения могут быть использованы при проектировании бесплатформенных инерциальных навигационных систем.

Таблица 14. Параметры точности трехшаговых алгоритмов

Алгоритм	Кол-во шагов опроса в шаге интегр.	Изм. вел.	$N$	$k$
PPKR3h1	1	<b>q</b>	1	0,25
PPUR3h1	1	<b>ω</b>	1	0,25
PPKR3h2	1	<b>q</b>	1	0,0077
PUR3h2	1	<b>ω</b>	2	0,00083
PPKBR3h1	3	<b>q</b>	1	0,8
PPUBR3h1	3	<b>ω</b>	1	0,75
PPKBR3h2	3	<b>q</b>	2	0,0075
PPUBR3h2	3	<b>ω</b>	2	0,75

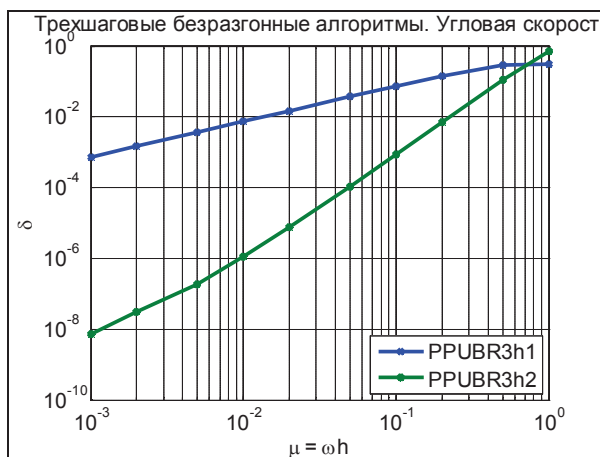
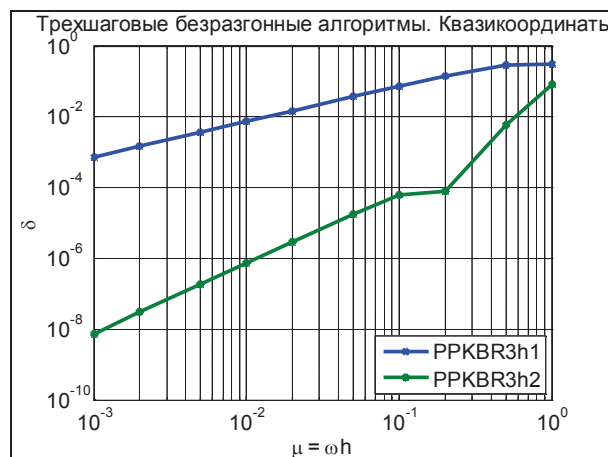
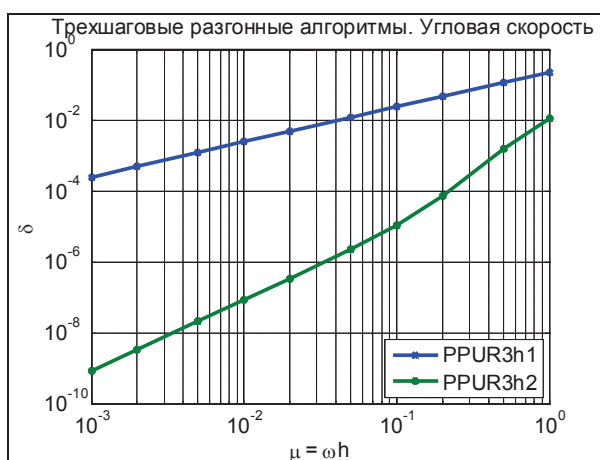
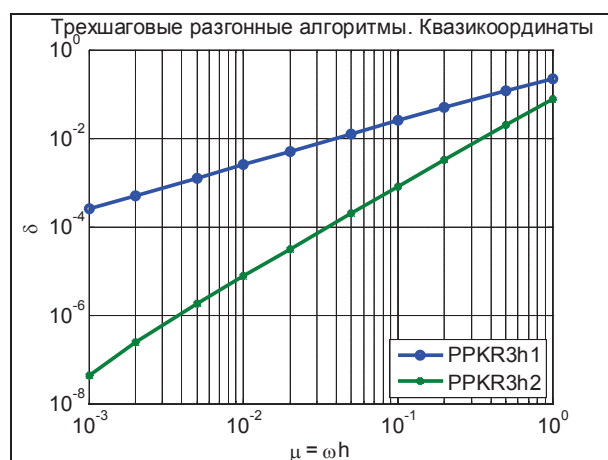


Рис. 3. Трехшаговые алгоритмы метода Пикара

**Литература**

1. Лазарев Ю. Ф. / Результаты v-тестирования точности безразгонных алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации / Ю. Ф. Лазарев, С. А. Мураховский, П. М. Аксененко // X Международная научно-техническая конференция «Гиротехнологии, навигация, управление движением и конструированием авиационно-космической техники». Сборник докладов. – К.: НТУУ «КПИ», 2015 – С. 475 – 482.

2. Панов А. П. Математические основы теории инерциальной ориентации / А. П. Панов. – К.: Наук. думка, 1995. – 280 с.

3. Лазарев Ю. Ф. Розроблення і моделювання алгоритмів безплатформової системи орієнтації: Електрон. навч. посіб. / Ю. Ф. Лазарев, Я. Г. Бобровицька. – К.: НТУУ "КПІ", 2011. – 135 с. – Електронний ресурс:  
[http://kafpson.kpi.ua/Arhiv/Lazarev/ra\\_bins.pdf](http://kafpson.kpi.ua/Arhiv/Lazarev/ra_bins.pdf).

УДК 531.76

**Ю. Ф. Лазарєв, А. О. Сандій***Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,  
м. Київ, Україна***СИНТЕЗ І ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ АЛГОРИТМІВ БІСО НА ОСНОВІ РІВНЯННЯ ПУАССОНА**

Синтезовані алгоритми різних наближень для визначення параметрів орієнтації в безплатформенній інерціальній системі орієнтації (БІСО), що входить до складу безплатформенної інерціальної навігаційної системи (БІНС). Комп'ютерним моделюванням досліджено основні характеристики похибок та надано рекомендації щодо застосування алгоритмів.

Використання матричного рівняння Пуассона в безплатформенній інерціальній системі навігації має певні переваги, - не потрібні додаткові перетворення для перепроєктування вектора прискорення з пов'язаної в земну систему координат, а визначення орієнтації основи спирається тільки на операції з матрицями.

**Ключові слова:** синтез алгоритмів, безплатформенна інерціальна система орієнтації (БІСО), безплатформенна інерціальна навігаційна система (БІНС), матричне рівняння Пуассона, вектор прискорення.

**Yu. F. Lazarev, A. O. Sandiy***National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine***SYNTHESIS AND STUDY OF THE ACCURACY OF ALGORITHMS BASED STRAPDOWN INERTIAL ORIENTATION SYSTEM POISSON EQUATION**

Synthesized algorithms of various approximations to determine the orientation settings in the strapdown inertial orientation system (SIACS), part of the strapdown inertial navigation system (SINS). Computer simulation study the main characteristics of errors and recommendations on the use of algorithms.

Using the matrix of the Poisson equation in a strapdown inertial navigation system has certain advantages - no additional conversion to vector reprojected of acceleration related to the earth coordinate system, and the definition of the base orientation is based only on the matrix operations.

**Keywords:** synthesis algorithms, strapdown inertial attitude control system (SIACS) strapdown inertial navigation system (SINS), a matrix Poisson equation, the acceleration vector.

*Надійшла до редакції  
19 лютого 2016 року*

*Рецензовано  
04 березня 2016 року*

© Лазарєв Ю. Ф., Сандий А. А., 2016