

кость и величину собственных частот колебаний подвеса. Так относительная деформация поверхностных слоев на линейном участке для YX-среза больше аналогичной величины для ST-среза в 1,3 раза. При этом длина линейного участка относительной деформации больше у ST-среза. Частота собственных поперечных колебаний для ST-среза на 10% меньше, чем у YX-среза, а частоты крутильных колебаний, наоборот, больше на 10% у подвеса ST-среза.

Полученные результаты могут быть использованы для расчета чувствительности и определения полосы пропускания микроакселерометра.

В дальнейшем планируется провести выбор оптимальной толщины консоли обеспечивающей необходимое значение относительного удлинения поверхностного слоя для обеспечения заданного предела измерений ускорения.

Литература

1. Лукьянов Д. П. Разработка и оптимизация схемы построения микроакселерометра на поверхностных акустических волнах (Часть 1) / Д. П. Лукьянов, М. М. Шевелько, С. Ю. Шевченко и др. // Гироскопия и навигация. – 2005. – №2 (49).
2. Моделирование чувствительных элементов ММА и ММГ на ПАВ в программе ANSYS / Д. П. Лукьянов [и др.] // 65-я научно-техническая конференция профессорско-преподавательского состава университета : сб. докл. студентов, аспирантов и молодых ученых / СПбГЭТУ "ЛЭТИ". - СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2012. - С. 192-195.
3. Heyliger P. Elastic constants of natural quartz / P. Heyliger, H. Ledbetter, S. Kim. // Acoustical Society of America Journal. – 2003. – №114. – С. 644–650.
4. Зеленка И. Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах: Материалы, технология, конструкция, применения: Пер. с чешск. / И. Зеленка. - М.: Мир, 1990. - 584 с.
5. Смагин А. Г. Пьезоэлектричество кварца и кварцевые резонаторы / А. Г. Смагин, М. И. Ярославский. – М.: Энергия, 1970. – 488 с.
6. Балышева О. Л. Материалы для акустоэлектронных устройств: учеб. пособие / О. Л. Балышева. ГУАП. – СПб., 2005. – 50 с.

*Надійшла до редакції
24 липня 2015 року*

© Золотарьов Є. А., Бондар П. М., 2015

УДК 531.76

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ БИСО, МИНИМИЗИРУЮЩЕМ ДРЕЙФ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Лазарев Ю. Ф., Мураховский С. А.

*Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт",
г. Киев, Украина*

E-mail: serge17@ua.fm

Рассматриваются вопросы точности алгоритмов численного интегрирования уравнений ориентации. Проведен сравнительный анализ известных алгоритмов, а также их коррекция.

Предложен новый алгоритм повышенной точности.

Сделаны выводы об эффективности нового алгоритма для применения в бесплатформенных инерциальных системах ориентации.

Ключевые слова: алгоритмы БИСО, погрешности численного интегрирования.

Введение

Наиболее опасной составляющей погрешности алгоритмов численного интегрирования уравнений ориентации является возникающее при колебаниях основания вокруг двух взаимноперпендикулярных линейное нарастание среднего значения погрешности определения значения угла поворота вокруг третьей из ортогональных осей. Это явление связано с наличием в уравнениях ориентации мультипликативных членов, в результате чего при синхронных колебаниях основания вокруг двух ортогональных осей может появиться постоянная средняя скорость увеличения погрешности определения угла поворота вокруг третьей оси, которую в дальнейшем будем называть дрейфом погрешности. В общем случае этот дрейф существенно определяется сдвигом фаз между колебаниями основания по двум осям, принимая, в зависимости от его величины положительное или отрицательное значение или обращаясь в нуль. Поэтому основное значение приобретает амплитуда этого дрейфа как функции сдвига фаз. Эту амплитуду назовем максимальным дрейфом. Именно максимальное значение дрейфа погрешности может быть принято в качестве основной характеристики точности алгоритма БИСО.

Сравнительный анализ известных алгоритмов

Известен ряд безразгонных двухшаговых алгоритмов четвертого порядка [1, с.178-179] бесплатформенных инерциальных систем ориентации (БИСО), базирующихся на измерении угловой скорости вращения основания.

Рассмотрим три из них. Первый (назовем его `algorithm3_3_120`) – вычисляет приращение вектора ориентации Эйлера по формуле (3.3.120) [1]:

$$\phi_{N+2} = \frac{h}{3} [\omega_N + 4\omega_{N+1} + \omega_{N+2} + h(\omega_{N+1} \times)(\omega_{N+2} - \omega_N)]. \quad (1)$$

Второй алгоритм (`algorithm3_3_121`) – определяет приращение вектора ориентации Эйлера по формуле (3.3.121) [1]:

$$\phi_{N+2} = \frac{h}{3} [\omega_N + 4\omega_{N+1} + \omega_{N+2} + h(\omega_{N+2} \times)\omega_N]. \quad (2)$$

Третий алгоритм (`algorithm3_3_126`) – вычисляет приращение вектора ориентации Эйлера по формуле (3.3.126) [1]:

$$\phi_{N+2} = \frac{h}{3} (\omega_N + 4\omega_{N+1} + \omega_{N+2}) + \frac{h^2}{15} [4(\omega_{N+1} \times)(\omega_{N+2} - \omega_N) + (\omega_{N+2} \times)\omega_N], \quad (3)$$

Здесь обозначено: N – номер шага опроса; ϕ_{N+2} – приращение вектора ориентации Эйлера на шаге интегрирования $H = 2h$, где h – шаг опроса измерителей; $\omega_N, \omega_{N+1}, \omega_{N+2}$ – векторы (матрицы-столбцы из проекций на связанные оси) угловой скорости, измеренные в моменты времени, соответствующие на-

чалу, середине и концу шага интегрирования.

Проведем сравнение точности этих алгоритмов на основе компьютерного V -тестирования [2] процесса численного интегрирования движения основания. При этом будем полагать следующие законы движения основания:

$$\psi(t) \equiv 0; \quad \vartheta(t) = \vartheta_m \sin(\omega t + \varepsilon); \quad \phi(t) = \phi_m \sin(\omega t)$$

и изучать, в основном, дрейф погрешности $\left\langle \frac{d(\delta\psi)}{dt} \right\rangle = \langle \delta\dot{\psi} \rangle$ определения угла ψ

и используем такие значения параметров движения основания:

$$\vartheta_m = \phi_m = 0,1 \text{ радиана}; \quad \omega = 1 \text{ радиан/ с}; \quad \varepsilon = 90^\circ.$$

Предварительные исследования показали, что в случае интегрирования **векторных** уравнений ориентации, дрейфы погрешности достигают максимальных величин при сдвиге фаз колебаний основания, равном 90° . Поэтому в дальнейшем изучалось поведение погрешностей именно при этом сдвиге фаз.

Результаты тестирования приведены на рисунке 1. Значения дрейфов $\langle \delta\dot{\psi} \rangle$ при разных значениях шага опроса измерителей приведены в таблице 1.

Таблица 1. Дрейфы исходных алгоритмов

Шаг опроса h , с	Величина дрейфа		
	algorithm3_3_120	algorithm3_3_121	algorithm3_3_126
0.1	1,64e-8	-6,61e-5	-1,32e-5
0.01	1,64e-12	-6,64e-7	-1,33e-7
0.001	1,64e-16	-6,64e-9	-1,33e-9

Нетрудно убедиться, что алгоритмы, определяемые формулами (3.3.121) и (3.3.126) являются алгоритмами не четвертого, как утверждается в [1], а второго порядка. Причиной этого является неверный знак перед последними слагаемыми в формулах (2) и (3). Если их изменить на противоположные, т.е. использовать вместо (2) формулу:

$$\phi_{N+2} = \frac{h}{3} [\omega_N + 4 \omega_{N+1} + \omega_{N+2} - h(\omega_{N+2} \times) \omega_N], \quad (2,a)$$

а вместо (3) – выражение:

$$\phi_{N+2} = \frac{h}{3} (\omega_N + 4 \omega_{N+1} + \omega_{N+2}) + \frac{h^2}{15} [4(\omega_{N+1} \times)(\omega_{N+2} - \omega_N) - (\omega_{N+2} \times) \omega_N], \quad (3,a)$$

то новые алгоритмы будут иметь действительно четвертый порядок. В этом можно убедиться по результатам тестирования, представленным на рисунке 2 и в таблице 2.

Отметим, что алгоритм на основе (2,a) существенно (на порядок) уступает по точности остальным двум алгоритмам. Поэтому его использовать не рекомендуется.

Предлагаемый новый алгоритм

Построим алгоритм на основе формулы, усредняющей вычисления по фор-

мулам (1) и (3,а), а именно

$$\phi_{N+2} = \frac{h}{3} (\omega_N + 4\omega_{N+1} + \omega_{N+2}) + \frac{h^2}{30} [9(\omega_{N+1} \times)(\omega_{N+2} - \omega_N) - (\omega_{N+2} \times)\omega_N]. \quad (4)$$

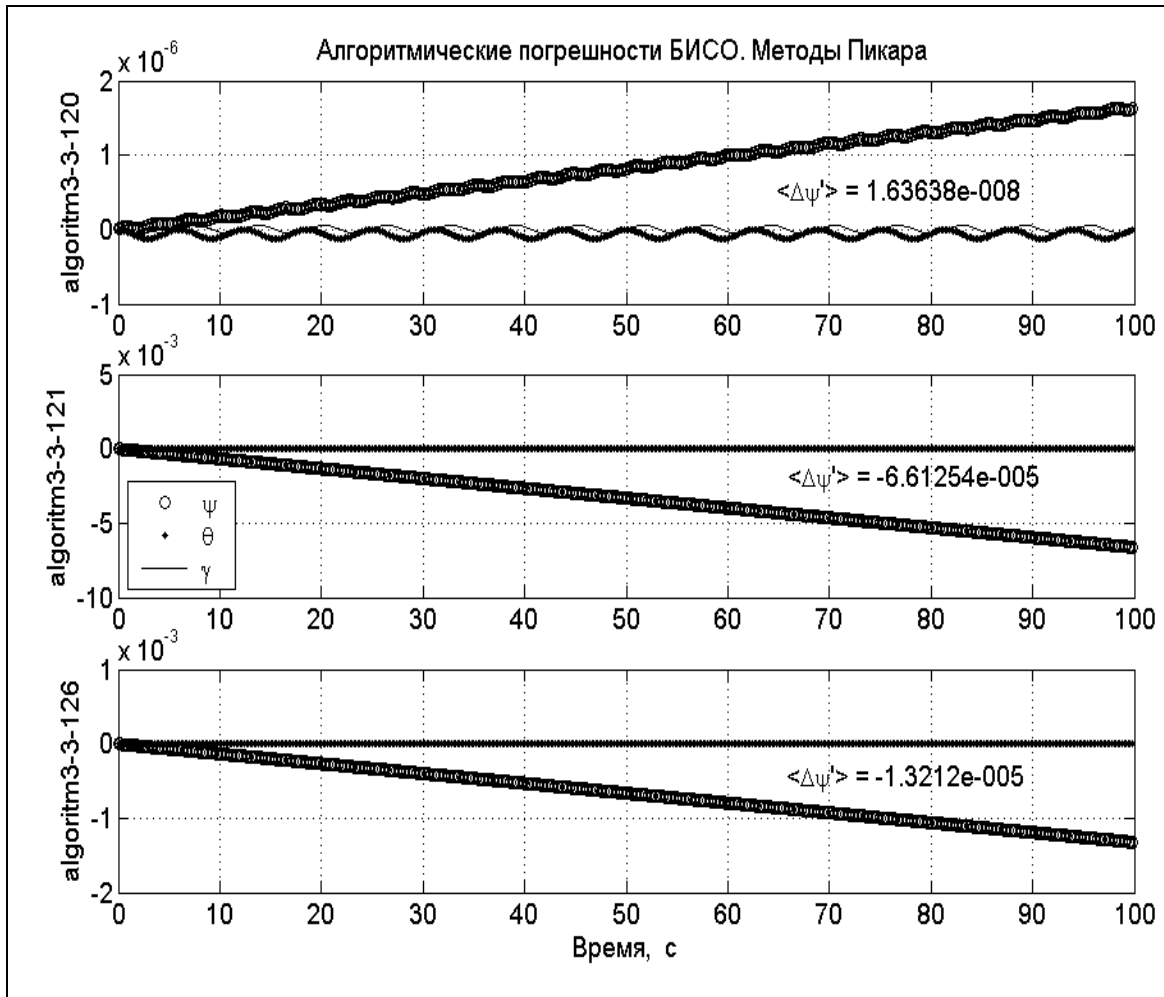


Рис. 1. Результаты V-тестирования исходных алгоритмов

Таблица 2. Дрейфы скорректированных алгоритмов

Шаг опроса h , с	Величина дрейфа		
	algorithm3_3_120	algorithm3_3_121K	algorithm3_3_126K
0.1	1,64e-8	-1,48e-7	-1,66e-8
0.01	1,64e-12	-1,49e-11	-1,66e-12
0.001	1,64e-16	-1,49e-15	-1,66e-16

Следует ожидать, что, так как вычисления по исходным алгоритмам приводят к дрейфам практически одинаковым по величине, но противоположным по знаку, то дрейф погрешности нового алгоритма будет существенно меньшим.

Тестирование нового алгоритма (algorithmNov062) показывает (рис. 3, таблица 3), что, действительно, его максимальные дрейфы на два порядка меньше по величине, чем рассмотренные ранее алгоритмы.

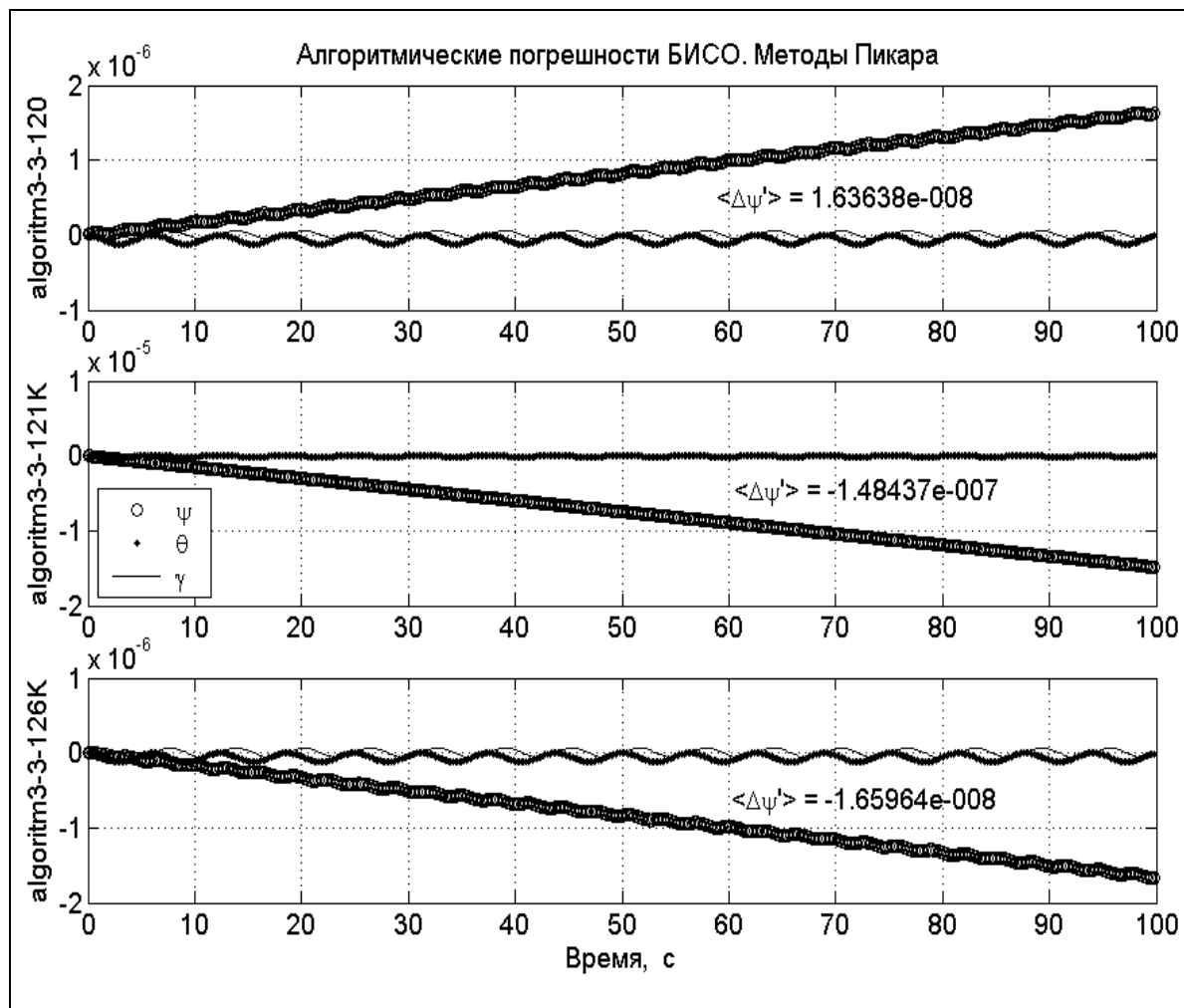


Рис. 2. Результаты V-тестирования скорректированных алгоритмов

Таблица 3. Дрейфы нового алгоритма

Шаг опроса h , с	Величина дрейфа		
	algorithm3_3_120	algorithm3_3_126K	algorithmNov062
0.1	1,64e-8	-1,66e-8	-1,16e-10
0.01	1,64e-12	-1,66e-12	-8,99e-15
0.001	1,64e-16	-1,66e-16	-1,57e-18

Тестирование при разных значениях амплитуд и частот колебаний основания показало, что наиболее обобщенной формой зависимости дрейфа от параметров интегрирования является представление дрейфа в виде относительной

величины $\delta = \frac{\langle \Delta \psi \rangle_{\max}}{\vartheta_m \varphi_m \omega}$, а шага опроса – в виде безразмерной величины $\mu = \omega h$,

называемой частотным параметром. По результатам тестирования построены графики (рис. 3, таблица 4) таких зависимостей для исследуемых алгоритмов.

Там же приведены графики эмпирических степенных аппроксимаций этих зависимостей

$$\delta_{121} = 0,148\mu^4; \delta_{126} = 0,0162\mu^4; \quad \delta_{Nov} = 0,000115\mu^4,$$

удовлетворительно совпадающих с результатами модельных экспериментов.

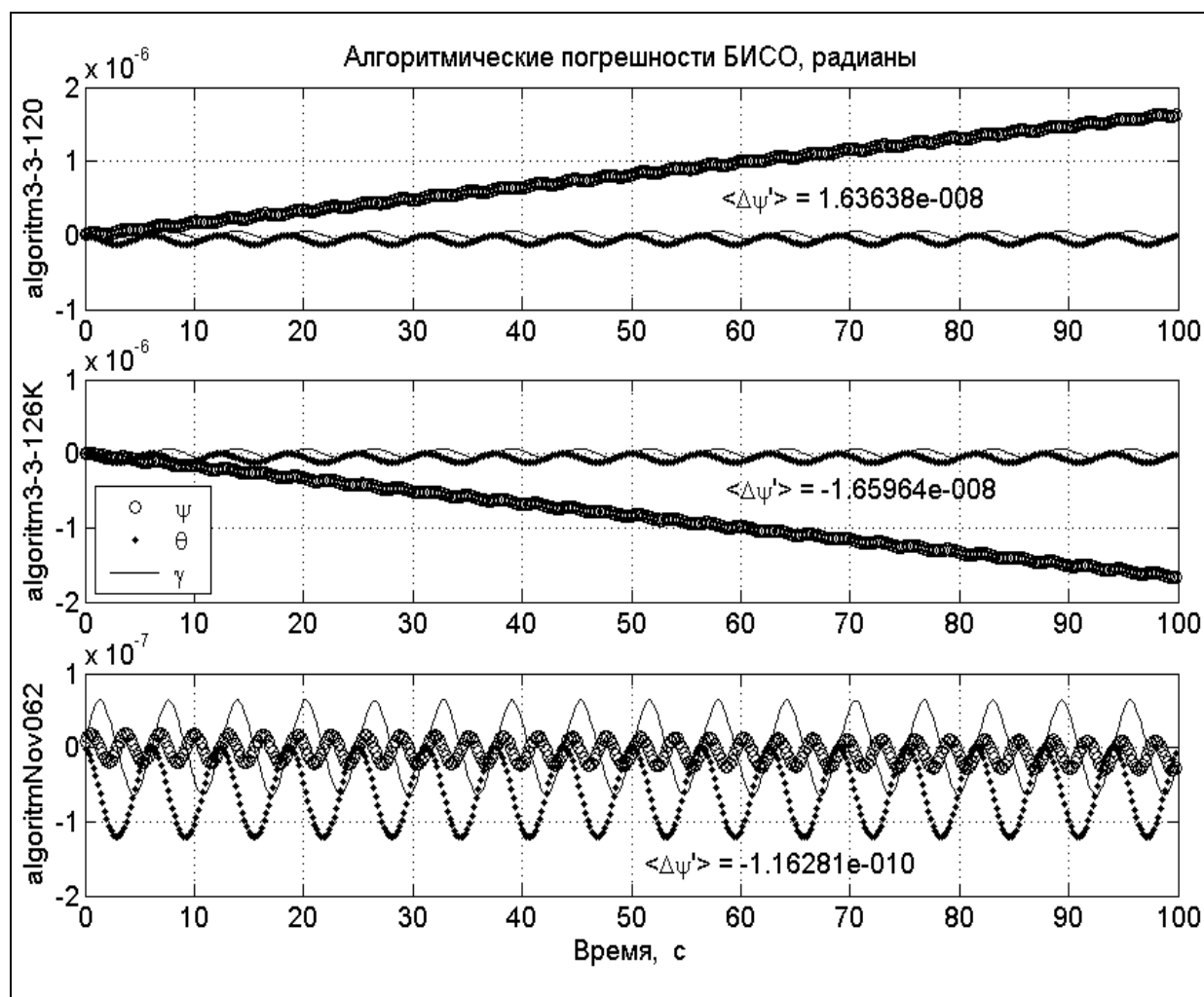


Рис. 3. Результаты V-тестирования нового алгоритма

Таблица 4. Максимальные дрейфы алгоритмов

Шаг опроса h , с	Максимальная величина дрейфа		
	algorithm3_3_120	algorithm3_3_126K	algorithmNov062
0.1	1,64e-8	1,66e-8	1,16e-10
0,05	1,03e-9	1,04e-9	6,03e-12
0,02	2,63e-11	2,66e-11	1,45e-13
0.01	1,64e-12	1,66e-12	8,99e-15
0,005	1,03e-13	1,04e-13	5,60e-16
0,002	2,63e-15	2,66e-15	1,51 e-17
0.001	1,64e-16	1,66e-16	1,57e-18

Из полученных результатов следует, что существенное (на два порядка) уменьшение дрейфов погрешностей сохраняется во всем рассмотренном диапазоне шагов опроса измерителей.

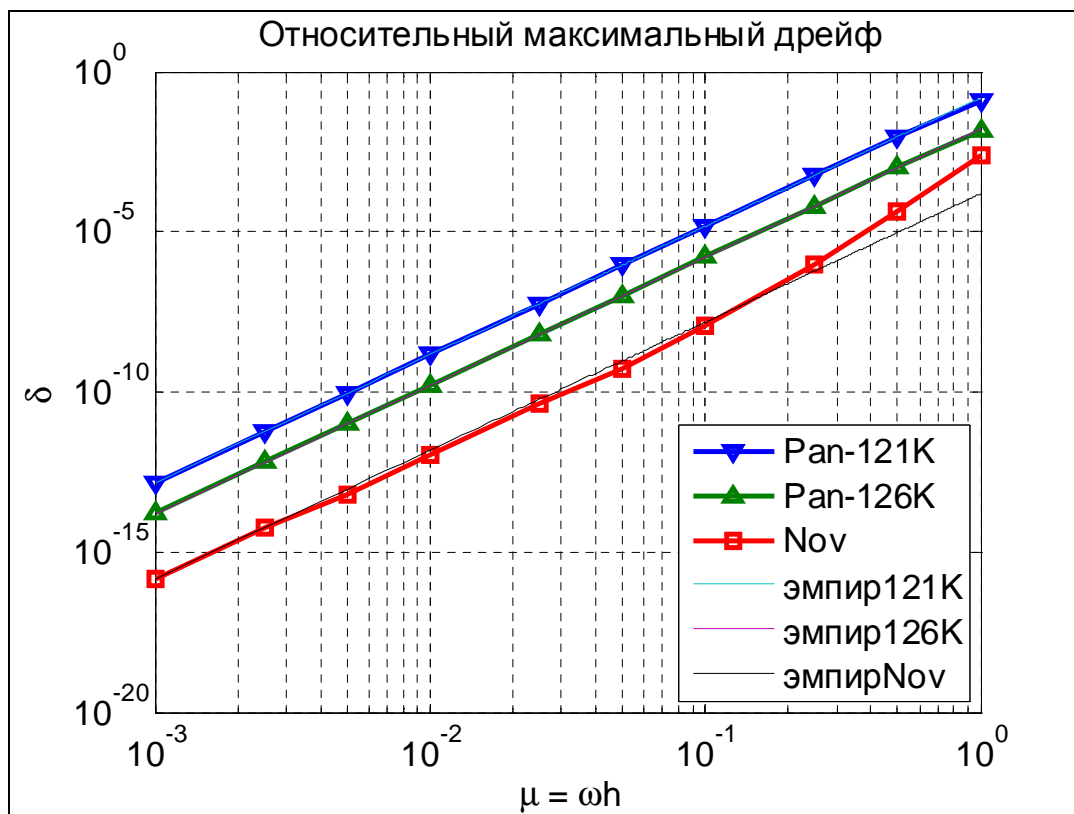


Рис. 4. Зависимость максимальных дрейфов погрешностей рассмотренных алгоритмов от шага опроса

Выводы

Предлагаемый безразгонный алгоритм четвертого порядка, использующий измерения угловой скорости основания, позволяет при сохранении объема требуемых вычислений существенно (на два порядка) уменьшить основную составляющую погрешности (скорость ее дрейфа) и потому может быть рекомендован для преимущественного применения в бесплатформенных инерциальных системах ориентации и навигации.

Литература

1. Панов А. П. Математические основы теории инерциальной ориентации / А. П. Панов. – К.: Наукова думка, 1995. – 280 с.
2. Слюсарь В. М. Актуальные вопросы проектирования алгоритмов ориентации БИНС. Ч. 1. Амплитудное расширение области применения алгоритмов / В. М. Слюсарь // Гироскопия и навигация. – 2006. – №2. – С. 61–75.

Надійшла до редакції
11 вересня 2015 року

© Лазарев Ю. Ф., Мураховський С. А., 2015