

ВИСОКОЕФЕКТИВНІ ТЕХНОЛОГІЧНІ ПРОЦЕСИ В ПРИЛАДОБУДУВАННІ

УДК 621.914.22

РЯДЫ МАКЛОРЕНА ПРИ ОБРАЗОВАНИИ ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Солодкий В. И., Глоба А. В.

*Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт",
г. Киев, Украина*

Работа посвящена методике составления и решению уравнения контакта при формообразовании винтовых поверхностей постоянного осевого шага. Полученное уравнение всегда является трансцендентным. Оно имеет несколько решений, каждое из которых является справедливым с математической точки зрения. Однако условиям формообразования удовлетворяет только одно.

Показано, что применив разложение Маклорена возможно свести многовариантное уравнение к простому уравнению степенного вида имеющего ограниченное количество действительных решений. Предложен способ выбора одного действительного решения уравнения, которое позволяет осуществить формообразование винтовой поверхности на станке.

***Ключевые слова:** уравнения контакта, сопряженные поверхности, разложение Маклорена.*

Введение. Постановка задачи

В настоящее время, ключевым этапом профилирования инструмента для формообразования винтовых поверхностей является составление уравнения контакта пары сопряженных поверхностей инструмент-деталь. Вопросу составления уравнения контакта, его решению и непосредственному профилированию инструмента посвящен значительный ряд работ [1-4], изданных в разное время.

Существующие методики профилирования исходной инструментальной поверхности при формообразовании винтовых поверхностей разработаны на основе кинематического метода при составлении уравнения контакта инструмент-деталь. Этот метод базируется на положении ортогональности вектора скорости относительного движения инструмент-деталь и вектора нормального к обрабатываемой поверхности в точки контакта [5].

Основной проблемой при профилировании инструмента для формообразования винтовых поверхностей является трансцендентность уравнений контакта винтовой поверхности с исходной инструментальной поверхностью [6,7]. Одновременно с этим возникает трудность в определении действительного решения уравнения. Суть проблемы состоит в том, что уравнение контакта имеет несколько решений. В самом простом случае, формообразования винтовой поверхности постоянного шага, уравнение контакта имеет четыре решения, каждое из которых является действительным с точки зрения математики, но только одно из них позволяет создать реальный инструмент.

Целью данной работы является разработка методики, которая позволяет трансформировать трансцендентное уравнение контакта в уравнение степенного вида с использованием разложения в ряд Маклорена. Это позволяет свести многовариантность решения уравнения контакта к получению одного корня, с последующим изготовлением инструмента, свободного от нарушения условий формообразования

Результаты исследования.

Для получения исходного уравнения контакта будем использовать кинематический метод определения сопрягающих поверхностей.

Для проведения исследований примем правую ортогональную систему координат $\{X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta\}$ связанную с винтовой поверхностью. Ось Z^Δ совпадает с осью винтовой поверхности. Оси X^Δ и Y^Δ расположены ортогонально относительно оси винтовой поверхности и совпадают с торцевым сечением винтовой поверхности. При исследовании будем считать известными профиль торцевого сечения винтовой поверхности, ее шаг H , а также винтовой параметр $p=P/2\pi$.

Определим нормаль \mathbf{n} к винтовой поверхности в исследуемой точке как векторное произведение двух векторов: вектора \mathbf{k}_τ касательного к торцевому профилю винтовой поверхности, и вектору \mathbf{k}_o касательного к осевому сечению винтовой поверхности. Вектор скорости относительного движения \mathbf{v} будем определять как скорость движения точки принадлежащей поверхности детали относительно инструмента. Тогда уравнение контакта можно записать в традиционной форме как результат скалярного произведения $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$

Вектор \mathbf{k}_τ касательный к профилю винтовой поверхности в ее торцевом пересечении можно определить как

$$\mathbf{k}_\tau = \{ \cos(\xi + t), \cos(\xi + t), 0 \}.$$

В приведенном уравнении параметр ξ является углом наклона касательного вектора \mathbf{k}_τ относительно оси X^Δ . Значение угла ξ отсчитывается от оси X^Δ в сторону противоположную движению часовой стрелки.

Вектор \mathbf{k}_o касательный к осевому профилю винтовой поверхности в расчетной точке M можно определить следующим образом. Перенесет точку M_τ принадлежащую торцевому сечению винтовой поверхности по винтовой траектории в точку M_o , которая принадлежит осевому перерезу. Этот "перенос" состоит из двух движений – вращения вокруг оси Z^Δ на величину угла β и прямолинейного движения вдоль оси Z^Δ на величину z_o . Таким образом, положение точки M в осевом сечении M_o определяется двумя параметрами – углом β , и расстоянием z_o которые можно найти из соотношений

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \delta; \quad \frac{H}{2\pi} = \frac{z_o}{\beta}.$$

Тогда уравнение касательной к осевому профилю винтовой поверхности можно записать в виде

$$\mathbf{k}_o = \begin{bmatrix} \sin \zeta \cos(\delta + t) \\ \sin \zeta \sin(\delta + t) \\ -\cos \zeta \end{bmatrix}.$$

В приведенном уравнении, угол ζ - это угол между касательной к осевому сечению профиля винтовой поверхности и отрицательным направлением оси Z^A . Таким образом, нормаль \mathbf{n} к винтовой поверхности можно определить как результат векторного произведения векторов \mathbf{k}_T и \mathbf{k}_o

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}_o \times \mathbf{k}_T = \begin{bmatrix} -\cos \zeta \sin(\xi + t) \\ \cos \zeta \cos(\xi + t) \\ \cos(\xi + t) \sin(\delta + t) \sin \zeta - \cos(\delta + t) \sin \zeta \sin(\xi + t) \end{bmatrix}.$$

Выполнив соответствующие преобразования, получим уравнение нормали \mathbf{n} в более простом виде

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\cos \zeta \sin(\xi + t) \\ \cos \zeta \cos(\xi + t) \\ \sin \zeta \sin(\delta - \xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\xi + t) \\ \cos(\xi + t) \\ \sin(\delta - \xi) \tan \zeta \end{bmatrix}.$$

Перейдем к определению скорости \mathbf{v} относительного движения, которое может быть определено как результат векторного произведения двух векторов: вектора \mathbf{L} , который определяет положение расчетной точки, относительно оси вращения дискового инструмента, и единичного вектора $\boldsymbol{\omega}$ вращения инструмента вокруг его оси (оси Z^A)

$$\boldsymbol{\omega} = \{\sin \varepsilon, 0, \cos \varepsilon\},$$

где угол ε - это угол между осями инструмента Z^A и детали Z^Y .

Положение расчетной точки относительно оси вращения инструмента определяется радиус-вектором \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t) \\ \rho \sin(\delta + t) - a \\ pt \end{bmatrix}.$$

В приведенном выражении параметр a - это расстояние между осями инструмента и детали. После выполнения соответствующих математических операций получим выражение скорости относительного движения в векторной форме

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \cos \varepsilon - \rho \cos \varepsilon \sin(\delta + t) \\ \rho \cos(\delta + t) \cos \varepsilon - pt \sin \varepsilon \\ -a \sin \varepsilon + \rho \sin(\delta + t) \sin \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в соответствии с кинематическим методом определения сопряженных поверхностей, уравнение контакта получено как результат скалярного произведения векторов \mathbf{n} и \mathbf{v} примет следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = & \cos(\xi + t)[\rho \cos(\delta + t)\cos \varepsilon - pt \sin \varepsilon] - \\ & - [a \cos \varepsilon - \rho \cos \varepsilon \sin(\delta + t)]\sin(\xi + t) + \\ & + [-a \sin \varepsilon + \rho \sin(\delta + t)\sin \varepsilon]\sin(\delta - \xi)\tan \zeta = 0. \end{aligned}$$

Получено уравнение контакта является трансцендентным относительно искомого параметра t и может быть решено только приближенными методами. Выполним его разложение в ряд Маклорена с тем, чтобы привести его к виду, который позволяет решить непосредственно относительно искомого параметра t .

Раскроем все выражения, которые входят в уравнение контакта

$$\begin{aligned} & (\cos t \cos \xi - \sin t \sin \xi) \times \\ & \times [\rho(\cos t \cos \delta - \sin t \sin \delta)\cos \varepsilon - pt \sin \varepsilon] - \\ & - [a \cos \varepsilon - \rho \cos \varepsilon(\cos \delta \sin t + \cos t \sin \delta)] \times \\ & \times (\cos \xi \sin t + \cos t \sin \xi) + \\ & + [-a \sin \varepsilon + \rho(\cos \delta \sin t + \cos t \sin \delta)\sin \varepsilon] \times \\ & \times \sin(\delta - \xi)\tan \zeta = 0. \end{aligned}$$

Заменим тригонометрические функции синус и косинус их разложениями в ряд Маклорена

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6}; \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2},$$

а после их подстановки и выполнения разложения, получим уравнение контакта в развернутом виде

$$\begin{aligned} & \rho \cos[\delta]\cos[\varepsilon]\cos[\xi] - a \cos[\varepsilon]\sin[\xi] + \rho \cos[\delta]\sin[\varepsilon] \sin[\xi] + \\ & t^6 \left(\frac{1}{36} \rho \cos[\delta]\cos[\varepsilon]\cos[\xi] + \frac{1}{36} \rho \cos[\varepsilon]\cos[\delta]\cos[\xi] \right) + \\ & t^4 \left(-\frac{1}{12} \rho \cos[\delta]\cos[\varepsilon]\cos[\xi] + \frac{1}{12} \rho \cos[\varepsilon]\sin[\delta]\sin[\xi] - \frac{1}{6} \rho \sin[\varepsilon]\sin[\xi] \right) - \\ & a \sin[\varepsilon]\sin[\delta - \xi]\tan[\xi] + \rho \sin[\delta]\sin[\varepsilon]\sin[\delta - \xi]\tan[\xi] + \\ & t^3 \left(\frac{1}{6} a \cos[\varepsilon]\cos[\xi] + \frac{1}{2} \rho \cos[\xi] \sin[\varepsilon] - \frac{1}{6} \rho \cos[\delta]\sin[\varepsilon]\sin[\delta - \xi]\tan[\xi] \right) + \\ & t \left(-a \cos[\varepsilon]\cos[\xi] - \rho \cos[\xi] \sin[\varepsilon] + \rho \cos[\delta]\sin[\varepsilon]\sin[\delta - \xi]\tan[\xi] \right) + \\ & t^2 \left(\frac{1}{2} a \cos[\varepsilon]\sin[\xi] + \rho \sin[\varepsilon] \sin[\xi] - \frac{1}{2} \rho \sin[\delta]\sin[\varepsilon]\sin[\delta - \xi]\tan[\xi] \right) = 0. \end{aligned}$$

Сгруппируем полученное уравнение относительно параметра t

$$K_6 t^6 + K_4 t^4 + K_3 t^3 + K_2 t^2 + K_1 t + K_0 = 0,$$

$$K_6 = \frac{1}{36} \rho \cos \varepsilon \cos(\delta - \xi),$$

$$K_4 = \frac{1}{12} [-\rho \cos \delta \cos \varepsilon \cos \xi - (\rho \cos \varepsilon \sin \delta + 2p \sin \varepsilon) \sin \xi],$$

$$K_3 = \frac{1}{6} \{a \cos \varepsilon \cos \xi + \sin \varepsilon [3p \cos \xi - \rho \cos \delta \sin(\delta - \xi) \tan \zeta]\},$$

$$K_2 = \frac{1}{2} a \cos \varepsilon \sin \xi + p \sin \varepsilon \sin \xi - \frac{1}{2} \rho \sin \delta \sin \varepsilon \sin(\delta - \xi) \tan \zeta,$$

$$K_1 = -a \cos \varepsilon \cos \xi - p \cos \xi \sin \varepsilon + \rho \cos \delta \sin \varepsilon \sin(\delta - \xi) \tan \zeta,$$

$$K_0 = \rho \cos \delta \cos \varepsilon \cos \xi - a \cos \varepsilon \sin \xi + \rho \cos \varepsilon \sin \delta \sin \xi -$$

$$- a \sin \varepsilon \sin(\delta - \xi) \tan \zeta + \rho \sin \delta \sin \varepsilon \sin(\delta - \xi) \tan \zeta.$$

Тогда трансцендентное уравнение контакта можно превратить в уравнение третьей степени, которое решается относительно искомого параметра t методами элементарной алгебры

$$K_3 t^3 + K_2 t^2 + K_1 t + K_0 = 0,$$

В том случае, когда требуется повышенная точность профилирования можно использовать уравнение контакта более высокой степени

$$K_4 t^4 + K_3 t^3 + K_2 t^2 + K_1 t + K_0 = 0,$$

Следует отметить, что в любом случае полученные уравнения имеют несколько решений (последнее до четырех).

Погрешность решения уравнений, выраженная степенными зависимостями разной степени, весьма незначительна. Так, при "точном" значении параметра $t = -0,176447$ степенное уравнение 4-й степени дает значение $t = -0,176434$, что составляет погрешность 0,0074%. Для уравнения 3-й степени соответственно, $t = -0,176337$ при погрешности 0,062%.

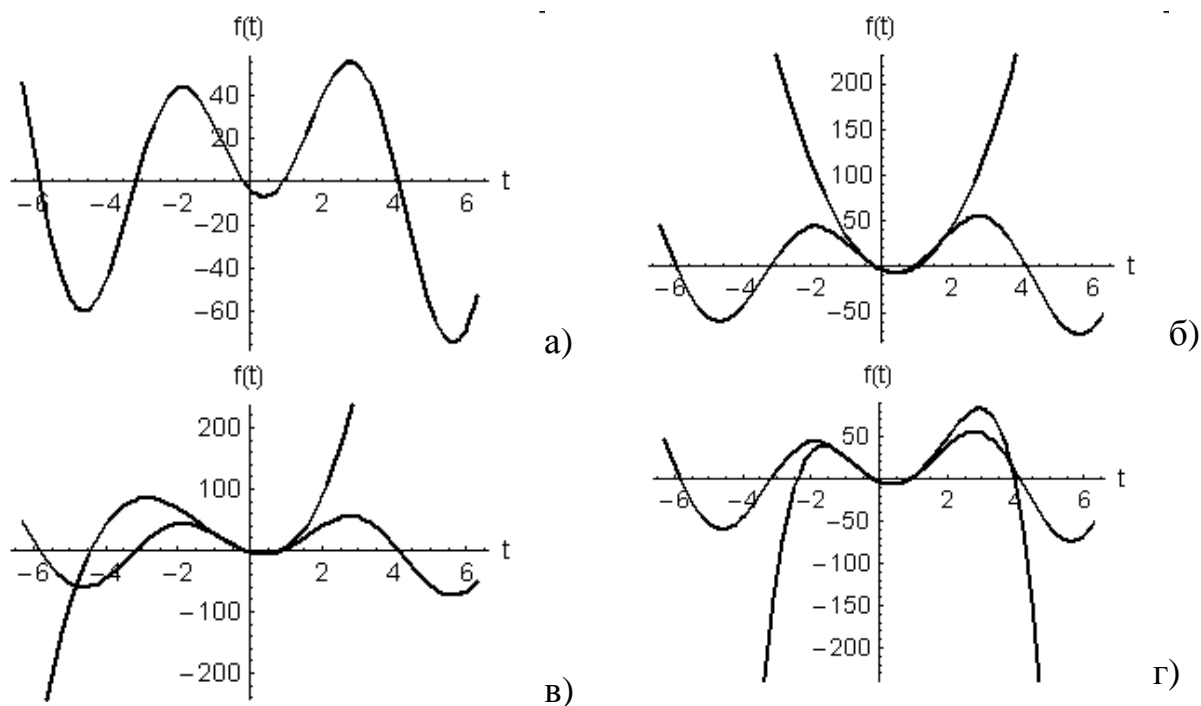


Рис. 1. Совмещенные графики уравнений контакта

На рис.1 показаны кривые уравнений $f(t)$ различной степени в диапазоне значений параметра $t \pm 2\pi$. На рис. 1, а представлено "точное" уравнение контакта $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. На рис. б, в, г последовательно представлены уравнения контакта второй, третьей и четвертой степеней. Видно, что во всех случаях, в окрестно-

сти области решения, степенное уравнение достаточно хорошо совпадает с основным уравнение контакта $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Решить уравнение $K_4 t^4 + K_3 t^3 + K_2 t^2 + K_1 t + K_0 = 0$ можно следующим способом. Преобразуем его к виду

$$t^4 + \frac{K_3}{K_4} t^3 + \frac{K_2}{K_4} t^2 + \frac{K_1}{K_4} t + \frac{K_0}{K_4} = 0,$$

После преобразований получим

$$K_3/K_4 = b = \frac{-2\cos[\xi](\cos[\varepsilon] + 3\sin[\varepsilon]) + 2\rho\cos[\delta] \sin[\varepsilon]\sin[\delta-\xi]\tan[\xi]}{2\rho\cos[\delta] \cos[\varepsilon]\cos[\xi] + (2\rho\cos[\varepsilon] \cos[\delta] + 2\rho\sin[\varepsilon])\sin[\xi]},$$

$$K_2/K_4 = c = \frac{-6(\cos[\varepsilon] + 2\sin[\varepsilon])\sin[\xi] + 6\rho\sin[\delta]\sin[\varepsilon]\sin[\delta-\xi]\tan[\xi]}{2\rho\cos[\delta]\cos[\varepsilon]\cos[\xi] + (\rho\cos[\varepsilon] \cos[\delta] + 2\rho\sin[\varepsilon])\sin[\xi]},$$

$$K_1/K_4 = d = \frac{12(\cos[\varepsilon]\cos[\xi] + \sin[\varepsilon](\rho\cos[\varepsilon] - \rho\cos[\delta] \sin[\delta-\xi]\tan[\xi]))}{\rho\cos[\delta]\cos[\varepsilon]\cos[\xi] + (\rho\cos[\varepsilon] \sin[\delta] + 2\rho\sin[\varepsilon])\sin[\xi]},$$

$$K_0/K_4 = e = -$$

$$\frac{12(\rho\cos[\delta]\cos[\varepsilon]\cos[\xi] + (-a + \rho\sin[\delta])(\cos[\varepsilon]\sin[\xi] + \sin[\varepsilon] \sin[\delta-\xi]\tan[\xi]))}{\rho\cos[\delta]\cos[\varepsilon]\cos[\xi] + (\rho\cos[\varepsilon] \sin[\delta] + 2\rho\sin[\varepsilon])\sin[\xi]}.$$

Тогда корни уравнения $t^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0$ совпадают с корнями двух квадратных уравнений

$$t^2 + (b + A)\frac{t}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0$$

где

$$A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c},$$

а параметр y – какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0.$$

Выводы

Метод разложения уравнения контакта при формообразовании винтовых поверхностей дисковым инструментом, позволяет значительно упростить поиск решения, заменив трансцендентное уравнение степенным.

Проведенный анализ погрешности решения показал, что при использовании степенного уравнения третьей степени погрешность не превышает сотых долей процента. А при использовании степенного уравнения 4-й степени погрешность решения сравнима с вычислительной погрешностью операционной среды вычислений.

Полученные результаты могут быть использованы при создании дискового инструмента для обработки фасонных винтовых поверхностей, а также при разработке высокопроизводительного инструмента применяемого на современных станках с ЧПУ.

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейшем развитии теории формообразования фасонных сложных поверхностей.

Литература

1. Чемборисов Н. А. Систематизация признаков способа формообразования / Н. А. Чемборисов // СТИН. – 2002. – № 8. – С. 32 – 35.
2. Сморгалов Н. В. Численное моделирование поверхностей при обработке резанием: монография / Н. В. Сморгалов. – Набережные Челны: КамПИ, 2003. – 203 с.
3. Шевелева Г. И. Теория формообразования и контакта движущихся тел: монография / Г. И. Шевелева. – М.: Изд-во Станкин, 1999. – 272 с.
4. Беклешов В. С. САПР в машиностроении: учебное пособие / В. С. Беклешов, Г. А. Морозова. – С.пб.: Машиностроение, 2005. – 141 с.
5. Радзевич С. П. Классификация рабочих поверхностей деталей и инструментов: учебное пособие / С. П. Радзевич. – Днепропетровск: Днепропетровский индустриальный институт, 1988. – 185 с.
6. Вайсбург В. А. Автоматизация технологической подготовки авиационного производства на базе ЭВМ и оборудования с ЧПУ: монография / В. А. Вайсбург, Б. А. Медведев. – Л.: Машиностроение, 1990. – 350 с.
7. Евгеньев Г. Б. Основы программирования обработки на станках с ЧПУ: монография / Г. Б. Евгеньев. – М.: Машиностроение, 1999. – 304 с.
8. Солодкий В. И. Метод подвижной поверхности при профилировании инструмента / В. И. Солодкий // Вестник НТУУ «КПИ». Серия машиностроение. – 2004. – Вып. 45. – С. 96 – 98.

*Надійшла до редакції
30 березня 2015 року*

© Солодкий В. И., Глоба А. В., 2015

УДК 620.179.14

ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВОЇ ПОХИБКИ ДЛЯ ВЕРСТАТІВ З СНС. ЧАСТИНА 1

Скицюк В. І.

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
м. Київ, Україна*

У попередній низці статей [1, 2] вже розглядалися точка, крапка та риска як технологічні елементи впливу на загальну точність реалізації виробу. Було показано, яким чином технологічний фантом (ТФ) точки перетворюється на реальну крапку, як елемент відліку. Риска, як технологічний елемент, є низка крапок, з'єднаних за визначеним законом, а тому її можна розглядати як крапку з певним подовженням.

Наразі, стаття присвячена польовим структурам похибок у класичній системі координат. Водночас, розглядаються дві системи координат.

Одна система координат є уявною, тобто ТФ якої не має ніяких похибок. Друга система координат є реальною, яка є пристайною з уявною. Такі об'єкти, як точка, крапка, риска, потрапляючи у реальну координатну систему з уявної, отримують певні спотворення. Але при цьому самі вносять певні спотворення у загальну систему відліку. Цим технологіч-