ISSN (p) 0321-2211, ISSN (e) 2663-3450
Наукові та практичні проблеми виробництва приладів та систем

УДК 536.2

ВИЗНАЧЕННЯ КОЄФІЦІЄНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВІДНОСТІ *a* ІМПУЛЬСНИМ МЕТОДОМ ДЛЯ НАПІВОБМЕЖЕНОГО СТРИЖНЯ

Шевченко О. І.
Головна астрономічна обсерваторія НАН України, Київ, Україна
E-mail: soi_51@ukr.net

У статті наведено методику та аналітичну формалізовану модель розрахунку коєфіцієнта температуропровідності твердих тіл із використанням номограм змін температури.

Метою роботи є зменшення обсягів обчислювальних розрахунків та спрощення формул внаслідок використання графічних номограм. При використанні комп'ютерної техніки збільшується кількість змінних. Використання методів теорії подібності та теорії узагальнених змінних із використанням номограм дозволяє уніфікувати розрахунки та краще зрозуміти зв'язок сформульованих задач з реальними фізичними процесами.

Автору невідомі приклади розв'язку обернених задач теплопровідності з використанням узагальнених змінних. Відповідно до прийнятої класифікації, задача розв'язується в граничних умовах 1-го роду, в яких температура поверхні задана як функція часу. Більш простим вважається випадок, коли поверхня тіла залишається постійною протягом усього процесу теплообміну. Це досягається за допомогою спеціальних пристроїв, які підтримують постійну температуру напівобмеженого стрижня з теплоізоляцією бічної поверхні. Відомим є [1] розв'язання прямої задачі теплопровідності, що здійснюється трьома методами: класичним, операторним та методом перетворення Фур'є. Теорія регулярного режиму розглядає [2] процес охолодження або нагрівання протягом не всього часу, а лише на стадії, що не впливає на початковий стан об'єкту. Не всі способи імпульсного нагріву відносяться до цих видів регулярного режиму, але його можна використовувати завдяки простій формі експоненти. Запропонований метод у цій роботі не відноситься до методів штатного режиму. Це досягається розв'язуванням оберненої задачі за допомогою розробленої графічної номограми. У роботі викладено методику, за якою остаточні формули спрощуються до алгебраїчних рівнянь використовуючи відносну температуру θ_M нагрівання напівобмеженого стрижня з торця. Відомі розв'язки прямих задач теплопровідності при використанні регулярних режимів 1-го, 2-го та 3-го роду, при яких остаточні формули спрощуються.

У методиці використовується максимум першої похідної від θ_M та табличні значення функції помилок erf (1/(2Fox), яка є розв'язком прямої задачі теплопровідності. Вимірюється температура у конкретній точці стрижня $-x_1$ та часі $-\tau_1$ з початку нагрівання. Для розрахунку в роботі використовується відносна надлишкова температура, яка розраховується за постійної температури на торці стрижня весь час нагрівання. Початкова температурою стрижня до процесу нагрівання та поточна температура вимірюються термопарою. Перспективним може бути застосування розробленої методики для використання у дослідженнях матеріалів однакового складу, але різних розмірів, оскільки при використанні узагальнених змінних формули та номограми будуть однакові. Цей факт скорочує час досліджень.

Ключові слова: *коєфіцієнт температуропровідності а; операційний метод Лапласа; напівобмежений стрижень; нагрівання; постійна температура; номограма; аналітичні моделі.*

Вступ

У статті наведено методику та формули для розрахунку коєфіцієнта температуропровідності твердих тіл з використанням відомих термограм. У роботі викладено методику, за якою остаточні формули спрощуються до алгебраїчного рівняння з використанням відносної температури $\theta_м$ нагрівання напівобмеженого стрижня з торця постійною температурою.

Огляд методів визначення

Вирішенню цієї задачі присвячено декілька робіт [1–10]. У роботі [1] розв'язок задачі здійснено за допомогою трьох відомих методів: класичного, операційного та методом перетворення Фур'є.

У роботі [2] Кондратьєва Г. М. розглядаються особливості регулярних режимів у стадії, яка не зазнає впливу початкового стану тіла.

Ознака регулярного режиму 1-го роду полягає в тому, що зміна температури в кожній точці системи відбувається за експонентою, яка однакова для всіх точок. При регулярному режимі 2-го роду швидкість зміни температури стає, по-перше, постійною, загальною для всіх точок тіла, і, по-друге, рівною швидкості зміни температури довкілля. Не всі методи імпульсного нагрівання відносяться до цих видів регулярного режиму, але їх можна використовувати завдяки простому виду експоненти [5 – 7].

Здійснюється розв'язання оберненої задачі за допомогою добре розробленої формули та рішення прямої задачі. За прийнятою класифікацією задача розв'язується при граничних умовах першого роду, у яких задається температура поверхні як функція часу. Розглянуто простіший випадок, коли поверхня тіла залишається постійною протягом усього процесу теплообміну. У роботі наведено розв'язок прямої задачі теплопровідності напівобмеженого стрижня з тепловою ізоляцією бокової поверхні.

Постановка задачі

Дано напівобмежений стрижень, бічна поверхня якого має теплову ізоляцію. В початковий момент часу ($\tau = 0$) діє миттєве джерело теплоти Q (Дж/м^2) на відстані ξ від кінця стрижня. Між кінцем стрижня й оточуючим середовищем T_C відбувається теплообмін за законом Ньютона.

Температура напівобмеженого стрижня в усіх точках має значення, що задане функцією $T(x,0) = = f(x)$ [1].

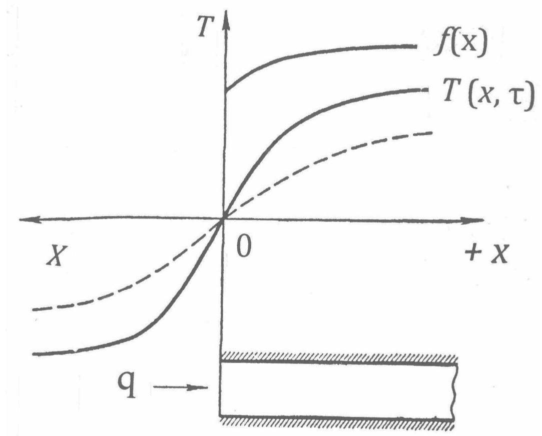

Рис. 1. Розподіл температур у напівобмеженому стрижні ([1], рис. 4.1)

У випадку дії миттєвого теплового імпульсу розраховують охолодження стрижня, але у проміжних розрахунках використовуються крайові умови для нагрівання та охолодження стрижня. У початковий момент кінець стрижня ($x_0 = 0$) приймає температуру T_C = const, яка підтримується постійною протягом усього процесу теплообміну.

У цій роботі розглядається охолодження стрижня, а в остаточну формулу внаслідок заміни змінної T отримують формули для нагрівання стрижня. Диференціальне рівняння є наступним:

$$\frac{\partial T(x,\ \tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\ \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0,\ 0 < x < \infty), \qquad (1)$$

$$T(x,\ 0) = 0\ , \qquad (2)$$

$$T(\infty,\ x) = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T(+\infty,\ \tau)}{\partial x} = 0\ . \qquad (4)$$

У цій моделі час [τ] = с; коефіцієнт температуропровідності [a] = м^2/с.

Диференціальні рівняння однакові для охолодження та нагрівання стрижня. Розрізняються лише крайові умови.

Умови автора [1] для охолодження стрижня наступні для спрощення $T(x,0) = T_0$ =const (початкова температура по довжині, яка є сталою і не залежить від x):

$$T(0,\ \tau) = T_C = \text{const}.$$

Спочатку для спрощення вважають $T_C = 0$.

Якщо кінець стрижня підтримується не при 0 ˚C, а при деякій температурі

$$T(0,\ \tau) = T_C = \text{const}.$$

Також для подальшого спрощення розрахунку вважають

$$T_C = 0 \ \text{ у точці } \ x = 0.$$

Якщо початкова температура постійна і не залежить від x, тоді

$$T(x,0) = T_0 = \text{const}.$$

У роботі [1] розв'язання задачі проводиться операційним методом Лапласа для випадку охолодження стрижня.

У дослідженнях, результати яких викладені в монографії [1], детально розглянуто задачу охолодження, тому для визначення коефіцієнта a можна використати і цю задачу.

Переведемо кінцеву розрахункову формулу в критеріальну форму. Відношення θ є відносною надлишковою температурою.

$$(T(x,\ \tau) - Tc) \,/\, (T_0 - Tc) = \theta. \qquad (5)$$

Позначено це відношення через θ_M для випадку нагрівання стрижня. Далі, позначення θ_M використовується для розв'язання задачі на нагрівання за формулами та граничними умовами автора цієї роботи та модернізованої номограми.

Мета роботи

Метою роботи є зменшення обсягів обчислювальних розрахунків та спрощення формул внаслідок використання графічних номограм. При використанні комп'ютерної техніки збільшується кількість змінних. Використання методів теорії подібності та теорії узагальнених змінних з використанням номограм дозволяє уніфікувати розрахунки та краще зрозуміти зв'язок сформульованих задач з реальними фізичними процесами.

Автору невідомі приклади розв'язку обернених задач теплопровідності з використанням узагальнених змінних та номограм.

Моделювання розподілу температурних полів у напівобеженому стрижні

Для нагрівання стрижня автором цієї статті запропонована модернізована номограма рис. 2

(рис. 4.6, стор. 83 оригіналу [1]), у якій шкала відносної температури θ_M розташована праворуч від графіків. Оскільки при нагріванні $T_C > T(x,\tau)$ та $T_C > T_0$, формула (5) змінена:

$$(T_C - T(x,\tau)) / (T_C - T_0) = \theta_M. \quad (6)$$

Диференціальні рівняння однакові для охолодження та нагрівання стрижня таке саме, як у формулі (1). Розрізняються лише крайові умови.

Крайові умови автора для нагрівання стрижня наступні:

$T(x,0) = f(x)$; для спрощення $T(x, 0) = T_0 = \text{const}$ (початкова температура по довжині, яка є сталою та не залежить від x).

$T(0, \tau) = T_C = \text{const}$.

Кінець стрижня підтримується при визначеній температурі

$T(0, \tau) = T_C = \text{const}$,

$T(x, \tau)$ – поточна температура в процесі нагрівання об'єкта.

Залежність між відносними температурами θ, θ_M і функціями $x\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$, $\sqrt{\pi}Fo_x\dfrac{\partial\theta}{\partial Fo_x}$ від локального числа Fo_X для напівобмеженого стрижня наведено на рис. 2, для цього використовується номограма для розподілу температури з оригіналу [1, стор. 82, рис. 4.6]. Величина θ_M є безрозмірною.

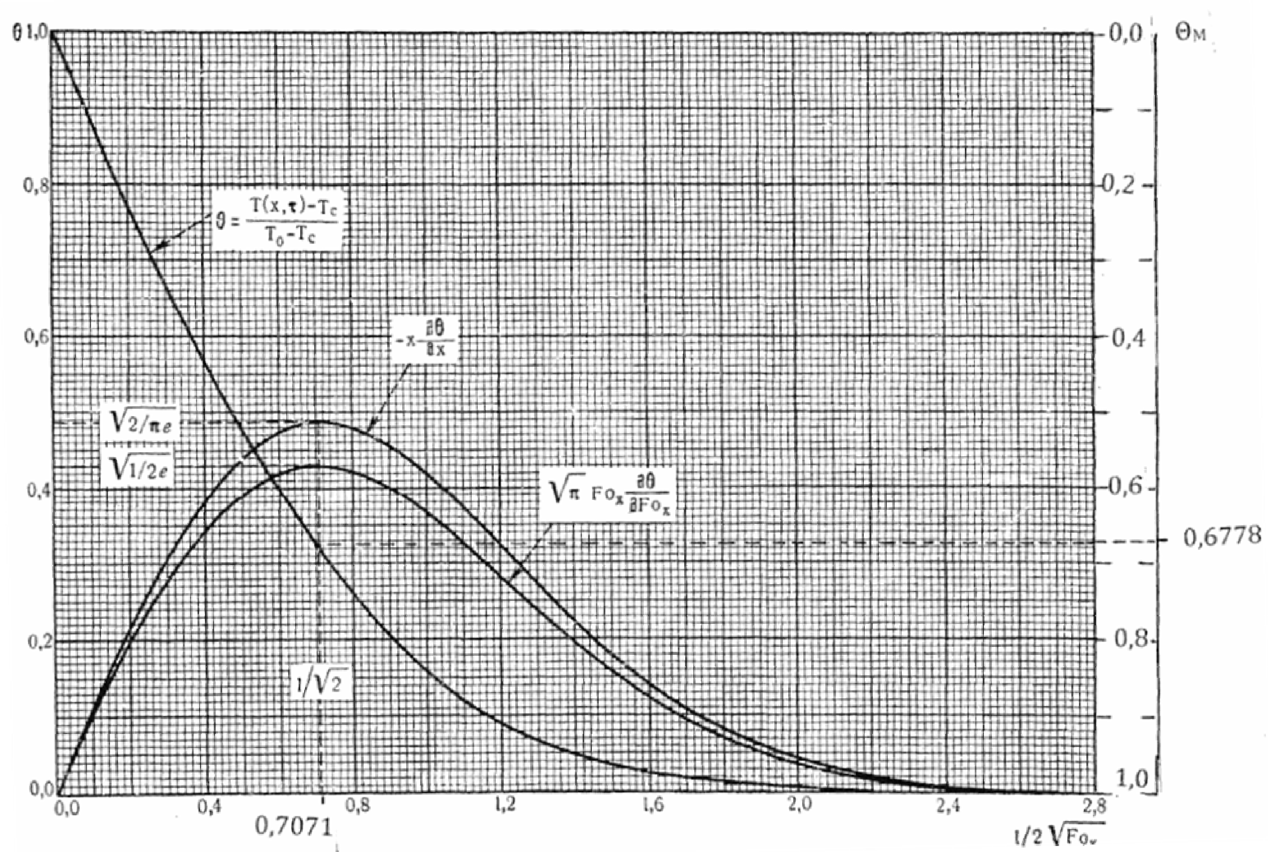

Рис. 2. Номограма для розподілу температури за дослідженням оригіналу [1, рис. 4.6, стор. 82]

Відношення $a\cdot\dfrac{\tau^2}{x}$ є числом гомохронності для процесів теплопровідності та є критерієм Фур'є для координати x

$$Fo_X = a\cdot\tau/x^2.$$

Таким чином

$$\theta_M = erf\left(\frac{1}{2\sqrt{Fo_X}}\right) \quad (7)$$

з табличного значення [9].

Позначка θ відноситься до охолодження, а θ_M – до задачі, сформульованої у цій роботі.

У [1, рис. 4.6] та [2] наведено графіки, які характеризують зміну θ_M, $x\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$ та $Fo_x\dfrac{\partial\theta}{\partial Fo_x}$ від числа $(1/2\cdot Fo_X^{-0,5})$ у випадку охолодження та нагрівання стрижня. З рис. 4.6 [1, стор. 82] видно, що при значенні $1/(2\sqrt{Fo_x}) = ½^{0.5}$ (на осі абсцис) похідні мають максимум.

$½^{0.5} = 0{,}7071$, отже, $1/(2\sqrt{Fo_x}) = 0{,}7071$, звідки маємо $Fo_X = 0{,}5$.

Для нагрівання стрижня похідні від температури мають такий самий вигляд і такі самі значення максимуму, як при охолодженні $1/(\sqrt{Fo_x}) = 1{,}4142$.

Перевіряємо за таблицями erf (табл. 1 [9]).

Підставляємо значення $1/2^{0.5} = 0{,}7071$ у формулу $\mathrm{erf}(0{,}7071) = 0{,}6778 = \theta_М$ з табличного значення [9].

Графік модернізованої номограми [1, рис. 4.6]) на шкалі графіку для $\theta_М$ значення для $\theta_М = 0{,}6778$ для

$$\frac{1}{2\sqrt{Fo_x}} = 1/2^{0.5} = 0{,}7071 \cdot$$

Тобто за допомогою таблиці отримаємо таке саме значення $Fo_X = 0{,}5$.

Графік [1] (рис. 4.6) для θ за змістом задачі відноситься для випадку охолодження стрижня.

А для нагрівання стрижня:

1) цей графік температури (рис. 2) слід дзеркально відобразити відносно осі $\theta = 0{,}5$;

2) або перевернути вертикальну шкалу θ, як це зроблено праворуч (рис. 2) та отримати нову шкалу $\theta_М$.

Для розрахунку температури при нагріванні не потрібно заново розв'язувати рівняння (1);

3) можна також зробити заміну змінних [1]. Це є рівносильним за результатом. Позначка θ відноситься до охолодження [1], а $\theta_М$ для нагрівання за новою методикою автора. Також, для нагрівання за новою методикою змінено порядок розрахунку відносної температури.

Автор вважає, що експеримент на нагрівання стрижня простіше реалізувати ніж охолодження стрижня. Подібна задача розв'язана для нагрівання стрижня в роботі Карслоу та Єгер [4, стор. 61, рис. 5]. Вигляд номограми наведено на рис. 3.

У монографії Ликова [1] функція Ф помилок Гауса позначається як erf. Функції $F(\xi)$ та $f(x)$ є перетвореннями Фурьє одна до другої [4].

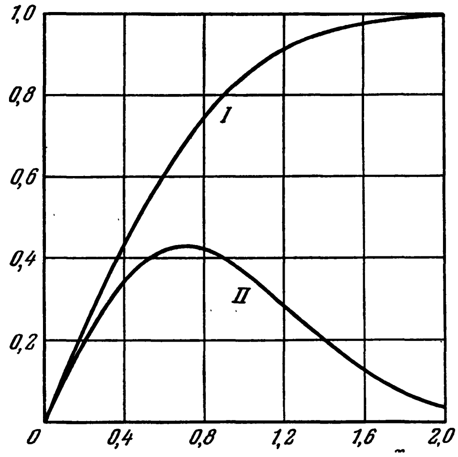

Рис 3. Функція помилок Гауса $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi$

Розрахунок коєфіцієнта температуропровідності *a* за методикою автора

Для нагрівання використовуються формули (6).

У спеціальному обладнанні, де закріплений стрижень випробувального матеріалу, з одного боку на торці розташований регульований за постійної температури $T_С$ нагрівач та на невеликій відстані x_1 від торця закріплюється термопара. Бокова поверхня стрижня термоізольована.

При включенні нагрівача на відстані x_1 вимірюється температура $T(x_1, \tau_1)$ у момент часу τ_1. Відстань x_1 обирається залежно від того, наскільки теплопровідний матеріал стрижня. При менш теплопровідному матеріалі це значення береться ближче до торця стрижня.

Таблиця 1. Значення функції помилок erf [9]

x	erf (*x*)	*x*	erf (*x*)	*x*	erf (*x*)
0	0	0,7	0,677801194	1,8	0,989090502
0,02	0,22564575	0,8	0,742100965	1,9	0,99279429
0,04	0,045111106	0,9	0,796908212	2	0,995322265
0,06	0,067621594	1	0,842700793	2,1	0,99702533
0,08	0,090078126	1,1	0,88020507	2,2	0,998137154
0, 1	0,112462916	1,2	0,910313978	2,3	0,99885686823
0,2	0,222702589	1,3	0,934007945	2,4	0,999311486
0,3	0,328626759	1,4	0,95228512	2,5	0,999593048
0,4	0,428392355	1,5	0,966105146	3	0,99997791
0,5	0,520499878	1,6	0,976348383	3,5	0,999999257
0,6	0,603856091	1,7	0,983790459		

Результати досліджень. Загальна методика розрахунку

1. *Перший крок.* Вимірюються всі температури $T(x_1,\tau_1)$, $Tс$ та T_0, які входять до формули (1); значення відстані x_1 та інтервалу часу τ_1. Після цього використаємо формулу $(T_С - T(x,\tau)) / (T_С - T_0) = \theta_М$.

І отримаємо значення надлишкової відносної температури $\theta_М$.

2. *Другий крок*. Використання модифікованої номограми.

Після того, як знайшли відносну температуру θ_M, знаходимо її значення за перевернутою шкалою праворуч, проводимо лінію паралельну лінії абсцис до перетину з термограмою. З точки перетину опускаємо на вісь абсцис перпендикуляр та на шкалі $1/(2\sqrt{Fo_x})$ знаходимо конкретне значення числа $1/(2\sqrt{Fo_x})$.

3. *Третій крок*. Знаходимо Fo_X. Наприклад, отримаємо число «Б». Тобто: «Б» $=1/(2\sqrt{Fo_x})$. Звідки: $Fo_X = 1/(4\cdot Б»^2)$; $(a\cdot\tau)/x^2 = 1/(4\cdot«Б»^2)$.

4. *Четвертий крок*. Знаходимо a: $a = x^2/(4\cdot\tau\cdot«Б»^2)$.

Після цього за попереднім розрахунком знаходимо коефіцієнт температуропровідності a та, знаючи числове значення θ_M, за формулою (6)(конкретне число «Б») за $\theta_M = 0{,}6778$. Для інших значень Fo_X будуть визначені й інші значення θ_M).

У формулу (6) підставляємо значення трьох температур:

$T_0 = 153$°C; (початкова температура по всій довжині стрижня);

$T_C = 300$°C; (температура кінця стрижня за весь час);

$T(x, \tau) = 200$°C; температура, до якої нагрівся стрижень у точці x_1 за інтервал часу $\tau_1 = 5$ с, та відстань до термопари від кінця стрижня $x_1 = =5\cdot10^{-2}$ м.

Значення x_1 та τ_1 беруться з експерименту:

(300°C − 200°C)/(300°C − 153°C) = 0,68.

$a\tau_1/x_1^2 = Fo_X = 0{,}5$; $a = 0{,}5x_1^2/\tau_1$; для відстані $x_1 = 5\cdot10^{-2}$ м (5 см);

та для часу $\tau_1 = 5$с.

Звідки $a = 2{,}5\cdot10^{-4}$ м^2/с.

Коефіцієнт температуропровідності *a,* що дорівнює $2{,}5\cdot10^{-4}$ м^2 /с, близький до значення a для вуглецю (композит) для температури 25 °С:

$a = 2{,}165\times10^{-4}$ м^2/с.

Висновки

На підставі проведених досліджень запропоновано методику визначення та розрахунку теплопровідності напівобмеженого стрижня. У методиці використовуються максимум першої похідної від θ та табличні значення функції помилки. Вимірюється температура в конкретній точці стрижня – x_1 та часу – τ_1 з початку нагрівання. Для розрахунку в роботі використовується відносна надлишкова температура, яка розраховується за постійною температурою на торці стрижня весь час під час нагрівання. Початковою температурою стрижня до процесу нагрівання та поточна температура, що вимірюється термопарою.

Перспективним може бути використання розробленої методики для використання у дослідженнях матеріалів однакового складу, але різних розмірів, оскільки при використанні узагальнених змінних формули та номограми будуть однакові, що скорочує час досліджень.

Література

1. А. В. Лыков, *Теория теплопроводности*. Москва, СССР: Высшая школа, 1967.
2. Г. М. Кондратьев, *Регулярный тепловой режим*. Москва, СССР: Гос. изд-во техн. - теор. лит., 1954.
3. P. J. Schneider, *Temperature Respons Charts*. New York, USA: Publisher John Wiley and Sons, 1963.
4. H. S. Carslaw, and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition. Oxford, UK: Oxford University Press, 1959.
5. A. Shevchenko, "Reverse Task of Heat Conductivity for the Semilimited Bar", *Metrology and Instruments*, no. 5, pp. 27–31, 2019. DOI: 10.33955/2307-2180(5)2019.27-31.
6. O. Shevchenko, "Finding the Temperature Conductivity Coefficient from the Solution of the Direct Problem of Heat Conductivity for a Semi-Limited Solid", *Bull. Kyiv Polytech. Inst. Ser. Instrum. Mak.*, no. 58(2), pp. 48–52, Dec. 2019. DOI: 10.20535/1970.58(2).2019.189485.
7. BS 7134: Section 4.2: 1990; Testing of engineering ceramics: Method for the determination of thermal diffusivity by the laser flash (or heat pulse) method. British Standards Institution, 1990.
8. K. D. Maglic, A. Cezairliyan, and V. E. Peletsky. Compendium of thermophysical property measurement methods: Vol. 1, survey of measurement techniques. United States: N.p., 1984. [Online]. Available: https://www.osti.gov/biblio/5033650
9. Error function. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Error_function.
10. W.P. Parker, R.J. Jenkins, C. P. Buttler and G.L. Abbott, "Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity",) *J. Appl. Phys*., 32, pp. 1679–1684, 1961. DOI: 10.1063/1.1728417.

UDC 536.2

A. I. Shevchenko
Main Astronomic Observatory of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

DETERMINATION OF THE TEMPERATURE CONDUCTIVITY COEFFICIENT a GRAPHICAL METHOD BASED ON NOMOGRAM FOR A SEMI-CONFINED ROD

The article presents a technique and formula for calculating the thermal diffusivity of solids using nomograms of temperature changes. The paper describes a technique by which the final formulas are simplified to algebraic equations using the relative temperature θ_M of heating a semi-restricted rod from the end.
Known equations for solving direct problems of heat conduction using regular modes of the 1-st, 2-nd and 3-rd kind, in which the final formulas are simplified.
The article provides methods and formulas for calculating the coefficient of thermal conductivity using nomograms. The method uses the maximum of the first derivative of θ_M and tabular values of the function erf $(1/(2\sqrt{Fo_x}))$, which is a solution to the direct problem of thermal conductivity. The temperature at a specific point of the rod is measured – x_1 and time $-\tau_1$ with start of heatingent of thermal conductivity of solid bodies using nomograms of temperature changes. The work describes a method by which the final formulas are simplified to algebraic equations using the relative temperature θ_M of heating a semi-restricted rod from the end. Known equations for solving direct heat conduction problems using regular regimes of the 1-st, 2-nd and 3-rd kind, in which the final formulas are simplified. In work Kondratiev H.M. notes: "The theory of the regular thermal regime is one of the sections of the study of heat transfer in solids. The theory of the regular mode considers the process of cooling or heating not throughout, but only at the stage that has ceased to be affected by the initial state of the body.
In the work of Lykov O.V. «Theory of thermal conductivity» the solution of the problem is done by three methods: classical, operational and the method of Fourier transformation. Not all methods of pulsed heating are related to these types of regular mode, but it can be used due to the simple form of the exponent. In this work, the proposed method does not belong to regular mode methods. It is done by solving the inverse problem with the help of a well-developed graphic nomogram.
According to the accepted classification, the problem is solved under boundary conditions of the 1-st kind, in which the surface temperature is specified as a function of time. Considered a simpler case when surface of the bodyremains constant throughout the heat exchange process.
This is achieved with the help of special devices that maintain a constant temperature of a semi-restricted rod with thermal insulation of the side surface.
Keywords: coefficient of thermalconductivity *a*; operational method of Laplace; semi-confined rod; heating at constant temperature; use of nomograms; analytical models.

Надійшла до редакції
23 жовтня 2023 року

Рецензовано
18 листопада 2023 року