УДК 536.21

НАХОЖДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ИЗ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА

Шевченко А. И.
Главная астрономическая обсерватория НАН Украины, Киев, Украина
E-mail: soi_51@ukr.net

В статье приведены методики и формулы для расчета коэффициента температуропроводности твердых тел с использованием известных решений прямых задач теплопроводности. Регулярным тепловым режимом третьего рода называется режим, при котором гармонический нагрев является установившимся (повторяющимся) во времени.

При установившемся гармоническом режиме известен закон колебания температуры всех точек тела во времени. Решение может быть приведено к простым алгебраическим формулам. Из этих решений алгебраическим путем можно найти достаточно простые соотношения для обратных задач – нахождение теплофизических характеристик твердого тела.

Приведены расчетные формулы для определения коэффициента температуропроводности тремя способами: через амплитуду температурной волны, период колебаний относительный коэффициент теплообмена; через сдвиг фазы температурной волны; через длину волны.

***Ключевые слова**: коэффициент температуропроводности; регулярный режим третьего рода; гармонический нагрев; полуограниченное твердое тело.*

Введение

Для решения обратных задач теплопроводности применяются достаточно сложные методы, включающие и гиперболические функции, и конечно-разностные методы. При определенных условиях проведения экспериментов задача упрощается, а именно при нагреве образца методами регулярного теплового режима 1, 2 или 3 рода [1].

В настоящей работе приведены окончательные расчетные формулы для расчета температурного поля, исходя из решения прямой задачи для неограниченной пластины с последующим переопределением граничных условий под неограниченное тело. Полное решение этой задачи приведено в монографии [2]. Существует несколько подходов и методик определения коэффициента температуропроводности ***a*** [3 10]. Анализ известных методов, способов и методик показывает, что экспериментальные методы ориентированы на техническую реализацию и исходят из возможностей доступного оборудования и приборов.

Существующие экспериментальные методики исходят из конкретных конструкций измерительных установок. В то же время известны хорошо изученные методы решения типовых задач теплопроводности, изложенные в известных фундаментальных работах [2]. Теоретические методы исходят из аксиом, уравнений и теоретических постулатов и решают фундаментальные проблемы обратных задач теплопроводности. В настоящей работе выбраны решения прямых задач из монографии [2], как такие, решения которых хорошо теоретически обоснованы и пользуются авторитетом у специалистов.

Исследование

1. Постановка и решение прямой задачи теплопроводности [2]

Дана неограниченная пластина толщиной $2R$ (м) при температуре T_0. В начальный момент времени она помещается в среду, температура которой изменяется по закону простого гармонического колебания

$$T_c(\tau) - T_0 = T_m \cos(2\pi\nu\tau), \quad (1)$$

где ν – частота колебаний (1/с); T_m – амплитуда колебаний температуры среды; τ – время (с). Теплообмен между поверхностями пластины и окружающей среды происходит по закону Ньютона. Требуется найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени.

В соответствии с [2] имеем

$$T(x,0) = T_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{\partial T(R,\tau)}{\partial x} + H\left[T_0 + T_m \cos(2\pi\nu\tau) - T[R,\tau]\right] = 0, \quad (4)$$

где $H = \alpha/\lambda$ – относительный коэффициент теплообмена, (1/м); α коэффициент теплоотдачи Вт/(м^2·К); λ коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К).

Размерности обратного коэффициента теплоотдачи $\frac{1}{\alpha}$ и величины термического сопротивления $r = \frac{\delta}{\lambda}$ одинаковы (м^2·К)/Вт, где δ толщина нагреваемого тела (м).

Задача симметричная, начало координат находится в середине пластины. В работе [2] приведены достаточно сложные формулы для решения этой задачи.

Для упрощения выкладок воспользуемся решением для случая полуограниченного тела [1]. Его можно получить из решения предыдущей задачи, перенеся начало координат из середины пластины на левую поверхность, т.е. сделав замену переменной x на $X - R$, и положив $2R \to \infty$ [2].

Окончательное решение после упрощений имеет вид

$$\theta = A_0 e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{aP}}} \cos\left[\frac{2\pi}{P}\tau - \left(X\sqrt{\frac{\pi}{aP}} + M\right)\right], \quad (5)$$

$$A_0 = \left(1 + \frac{2}{H}\sqrt{\frac{\pi}{aP}} + \frac{2\pi}{H^2 aP}\right)^{-1/2}, \quad (6)$$

где A_0 – амплитуда колебаний температуры ограничивающей поверхности, (К); a – коэффициент температуропроводности, (м^2/с);
$P = 1/\tau$, (1/с); X – текущая координата, (м); γ – плотность тела (кг/м^3); круговая частота $\omega = 2\pi\nu$, (1/с); M – смещение по фазе колебаний температуры ограничивающей поверхности по сравнению с температурой окружающей среды

$$M = arctg\left(\frac{1}{1 + H\sqrt{\frac{aP}{\pi}}}\right). \quad (7)$$

На рис. 1 приведен график изменения относительной температуры среды $\theta_c(\tau)$ и относительной температуры поверхности ограничивающего тела $\theta_п(\tau)$ (X = 0).

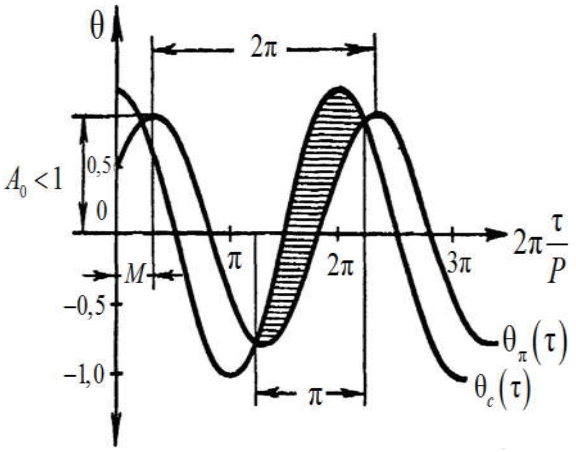

Рис. 1. Изменение относительной температуры окружающей среды и поверхности тела с течением времени [2]

В обобщенных переменных решение можно записать в виде [2]:

$$\theta = A_0\left(\exp\left(-\sqrt{\frac{1}{2}Pd_X}\right)\cos\left[\frac{Fo_X}{Fo'_X} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\left(\sqrt{\frac{1}{2}Pd_X} + M\right)\right]\right), \quad (8)$$

$$A_0 = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{Bi^*} + \left(\frac{1}{Bi^*}\right)^2\right]^{-1/2}, \quad (9)$$

$$M = arctg\left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}Bi^*}\right), \quad (10)$$

где $Pd_X = \frac{\omega X^2}{a}$ – локальное число Pd для координаты X, $Fo'_X = \frac{a\tau}{X^2}$ – обобщенный локальный аргумент (безразмерное время); отношение $Fo_x/Fo_x = \omega\tau$, Bi* – обобщенный аргумент, характерный для стационарных периодических состояний [2] и равный

$$Bi^* = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda c\gamma\omega}}. \quad (11)$$

2. Решение обратной задачи теплопроводности для коэффициента температуропроводности

2.1. Решение обратной задачи через амплитуду температурной волны A_0, используя уравнения (6).

Из уравнения (6) получим значение для коэффициента температуропроводности ***a***.

Обозначим $\frac{2}{H}\sqrt{\frac{\pi}{aP}}$ через x.

Возведем это выражение в квадрат $\left(\frac{2}{H}\sqrt{\frac{\pi}{aP}}\right)^2 = \frac{4\pi}{\left(H^2 aP\right)} = x^2$.

После некоторых преобразований получим квадратное уравнение

$$\left(A_0\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{H}\sqrt{\frac{\pi}{aP}} + \frac{2\pi}{H^2 aP}\right)^{-1}. \quad (12)$$

Определим его корни

$$x_{1,2} = -1 \pm A_0^{-1}\sqrt{2 - A_0^2}. \quad (13)$$

Поскольку x не может быть отрицательным, остается один корень x_1:

$$x_1 = -1 + A_0^{-1}\sqrt{2 - A_0^2}. \quad (14)$$

Решается обратная задача, поэтому по известной амплитуде A_0 необходимо найти величину коэффициента температуропроводности ***a***, который входит в выражение (14).

Следует отметить, что x_1 число безразмерное. Учитывая, что $\frac{2}{H}\sqrt{\frac{\pi}{aP}} = x_1$ и приравняв соответствующее значение x_1, значение ***a*** найдем из последующих равенств:

$$\frac{2}{H}\sqrt{\frac{\pi}{aP}} = -1 + A_0^{-1}\sqrt{2 - A_0^2}\ , \tag{15}$$

$$4\pi/aPH^2 = \left\{-1 + A_0^{-1}\sqrt{2 - A_0^2}\right\}^2\ , \tag{16}$$

$$a = \frac{4\pi}{PH^2}\cdot\left\{-1 + A_0^{-1}\sqrt{2 - A_0^2}\right\}^2. \tag{17}$$

Для нахождения ***a*** по этой методике необходимо также знать и коэффициент Н.

Ограничения на величину A_0 следующие: под корнем не может быть отрицательной величины: $2 > A_0^2$;

$\sqrt{2} > A_0$. Размерности правой и левой частей уравнения (17) совпадают – м²/с. В этом случае для нахождения ***a*** необходимо предварительно знать значения λ и α. Выводы: при увеличении α, увеличиваются Bi^* и A_0.

При увеличении λ, γ, с, и ω уменьшаются Bi^* и A_0. При уменьшении одного из сомножителей в знаменателе правой части формулы (14) и увеличении в такой же пропорции другого сомножителя обобщенного аргумента Bi^*, соответственно, A_0 не меняется [2]. В случае исследования температуропроводности ***a*** материалов, в которых происходят фазовые превращения, эту взаимосвязь необходимо учитывать.

2.2. Определение коэффициента температуропроводности через сдвиг фазы температурной волны (рис. 1).

Рассмотрим вычисление коэффициента температуропроводности ***a***, исходя из формулы (10)

$$tgM = \frac{1}{1 + H\sqrt{\frac{aP}{\pi}}}\ , \tag{18}$$

$$a = \left[\frac{1}{tgM} - 1\right]^2 \frac{\pi}{PH^2}. \tag{19}$$

Размерности левой и правой частей (19) совпадают. В данном случае также необходимо знать величины коэффициента теплопроводности, периода времени P, а также коэффициента Н.

2.3. Решение обратной задачи из уравнения для длины температурной волны Λ [2] (рис. 2.)

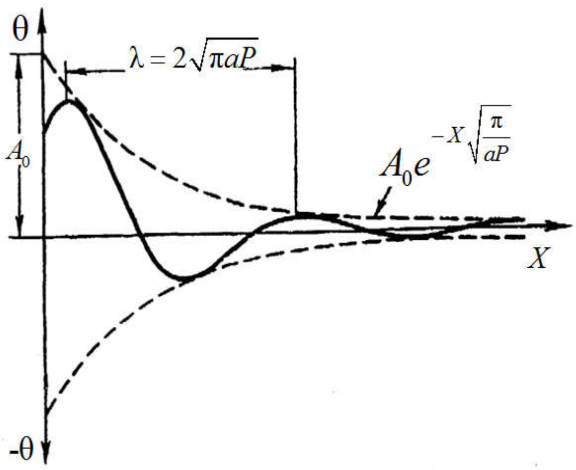

Рис. 2. Распределение относительной температуры по глубине пластины в данный момент времени [2]

При лазерном нагревании торца полубесконечной пластины можно получить некоторые упрощения методики нахождения ***a***. Тогда можно воспользоваться следующей формулой (20) того же автора [2] А. В. Лыкова. При этом необходимо знать величину теплового потока (мощность) лазерного излучения q_m при единичной амплитуде колебания температуры на поверхности пластины, равной $T_m = 1$ К:

$$\frac{q_m}{T_m} = \sqrt{\lambda c\gamma\omega}\ . \tag{20}$$

Используя формулу (20) [2] (рис. 2), после превращений (21) получим формулу (22)

$$\Lambda = 2\sqrt{\pi aP} = 2\sqrt{\frac{\pi a}{\nu}}\ , \tag{21}$$

$$a = \Lambda^2/4\pi P\ , \tag{22}$$

где Λ длина волны, (м).

Выводы

При установившемся гармоническом режиме (регулярный режим третьего рода) известен закон колебания температуры всех точек тела во времени. Решение может быть приведено к простым алгебраическим формулам. Из этих решений алгебраическим путем можно найти достаточно простые отношения для обратных задач – нахождение теплофизических характеристик твердого тела. Эти методики можно использовать в приборах и установках для определения ***a***.

Выбор способа нагрева поверхности пластины зависит от температурных интервалов, порядка значений величины ***a*** и свойств материала. Их можно в дальнейшем использовать и при фазовых переходах в образце при изменении температуры следующим образом: начиная от более низкой температуры, постепенно менять мощность нагрева и при аномальном изменении частоты, амплитуды или сдвига фаз синусоиды, фиксировать температуру начала аномалий и, возможно, определять значения теплоты фазовых превращений. Таким образом, предложено три метода определения коэффициента температуропроводности ***a*** при решении обратной задачи теплопроводности:

1. Через амплитуду температурной волны A_0 (К), период колебаний P (1/с) и относительный коэффициент теплообмена H (1/м).

2. Через сдвиг фазы температурной волны M; период колебаний P и относительный коэффициент теплообмена H.

3. Через длину волны Λ (м) и период колебаний P.

Эти формулы удобны для практических расчетов.

Литература

[1] Г. М. Кондратьев, *Регулярный тепловой режим*. Москва, СССР: Гос. изд. тех.-теоретич. лит., 1954.

[2] А. В. Лыков, *Теория теплопроводности*. Москва, СССр: Высшая школа, 1967.

[3] Г. М. Кондратьев, Г. Н. Дульнев, Е. С. Платунов, Н. А. Ярышев, *Прикладная физика. Теплообмен в приборостроении*. Пб.: СПбГУ ИТМО, 2003.

[4] С. В. Пономарев, Д. А. Дивина, Г. В. Шишкина, “Способ измерения коэффициента температуропроводности теплоизоляционных материалов методом регулярного теплового режима третьего рода”, Пат. РФ № 2 478 939 С1. МПК G01N 25/18. / (RU) . 2011141156/28 опубл. 10.04.2013. Бюл. № 10.

[5] Д. А. Любимова, С. В. Пономарев, А. Г. Дивин, *Измерение теплофизических свойств теплоизоляционных материалов методом регулярного режима третьего рода: монография*. Тамбов, РФ: ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014.

[6] В. Е. Зиновьев В. И. Бочаров, Р. Р. Мулюков и др., “Прибор для автоматизированных измерений теплофизических характеристик горных пород в условиях, близких к естественным”, *Измерительная техника*, № 1, с.62 63, 1985.

[7] С. В. Пономарев, С. В. Мищенко, А. Г.Дивин, В. А. Вертоградский, А. А. Чуриков, *Теоретические и практические основы теплофизических измерений*: под ред. С.В.Пономарева. Москва, РФ: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

[8] А. И. Шевченко, “Измерение коэффициента температуропроводности металлов”, *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, № 7, том 81, с. 62 63, 2015.

[9] А. И. Шевченко, “Метод визначення температуропровідності на основі аналогії функції розповсюдження температури та формул теорії ймовірності”, *Український метрологічний журнал*, № 1, с. 37 40, 2019.

[10] А. Б. Круглов, В. Б. Круглов, А. А. Тенишев, “Измерение температуропроводности материалов ядерной энергетики методом импульсного нагрева”, *Теплофизика высоких температур*, Т. 48, № 1, с. 145 148, 2010.

УДК 536.21

О. І. Шевченко

Головна астрономічна обсерваторія НАН України, Київ, Україна

ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФФІЦІЄНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВІДНОСТІ З РОЗВ'ЯЗКУ ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ НАПІВОБМЕЖЕНОГО ТІЛА

У статті приведені методики і формули для розрахунку коефіцієнта температуропровідності твердих тіл з використанням відомих розв’язань прямих задач теплопровідності. Для розв’язання обернених задач теплопровідності застосовуються досить складні методи, включаючи і гіперболічні функції, і кінцево-різницеві методи. За певних умов проведення експериментів завдання спрощується при регулярних теплових режимах 1, 2 або 3 роду. При цьому остаточні формули спрощуються до алгебраїчних рівнянь. Можливі і інші підходи для спрощення оберненого завдання теплопровідності, в яких рішення зводиться до алгебраїчних формул. Ці методи засновані на аналізі реперних точок, нулів функції розподілу температури, точок перегину цієї функції і її першої і другої похідних. У цій роботі приведені формули для розрахунку температурного поля, виходячи з рішення прямої задачі для напівобмеженого стрижня. Регулярним тепловим режимом третього роду називається режим, при якому гармонійне нагрівання є сталим (що повторюється) у часі. При сталому гармонійному режимі відомий закон коливання температури всіх точок тіла в часі. У роботі викладено три методики, за яких рішення може бути приведене до простих алгебраїчних формул при використанні особливих точок на термограмах нагрівання зразків. З цих рішень алгебраїчним шляхом можна знайти досить прості співвідношення для обернених задач – знаходження теплофізичних характеристик твердого тіла. Приведені розрахункові формули для визначення коефіцієнта температуропровідності трьома способами: через амплітуду температурної хвилі, період коливання і відносний коефіцієнт теплообміну; через зсув фази температурної хвилі; через довжину хвилі. Аналіз відомих методів, способів і методик показує, що експериментальні методи орієнтовані на технічну реалізацію і виходять з можливостей доступного устаткування і приладів. Існуючі експериментальні методики виходять з конкретних конструкцій вимірювальних установок. В той же час відомі добре вивчені методи вирішення типових задач теплопровідності, викладені у фундаментальних роботах. Теоретичні методи виходять з аксіом, рівнянь і теоретичних постулатів і вирішують обернені задачі теплопровідності. У цій роботі вибрані розв'язки

прямих задач з монографії Ликова О. В. «Теорія теплопровідності», як такі, розв'язки які добре теоретично обґрунтовані і мають авторитет у фахівців. Краєві умови для завдання наступні: даний напівобмежений тонкий стрижень, бічна поверхня якого має теплову ізоляцію. В початковий момент часу діє гармонійне джерело теплоти в перетині стрижня на деякій відстані від його кінця. Між кінцем стрижня і довкіллям відбувається теплообмін за законом Ньютона. Початкова (відносна) температура стрижня приймається рівною нулю. Теплообмін між вільним торцем стрижня і довкілля відбувається за законом Ньютона.
Ключові слова: коефіцієнт температуропровідності; регулярний режим третього роду; гармонійний нагрів; напівобмежене тверде тіло.

O. I. Shevchenko
The Main Astronomic Observatory of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

FINDING THE TEMPERATURE CONDUCTIVITY COEFFICIENT FROM THE SOLUTION OF THE DIRECT PROBLEM OF HEAT CONDUCTIVITY FOR A SEMI-LIMITED SOLID

The article concerns methods and formulas for the calculation of the coefficient of thermal conductivity of solid bodies using the known solutions of direct thermal conductivity tasks. The solution to the inverse problem of heat conductivity is based on the quite complicated methods including both hyperbolic functions and finite-difference methods. Under certain experimental conditions, the task is simplified at the regular thermal modes of 1, 2, or 3 types. Thus final formulas are simplified to algebraic equations. The simplification of the inverse problem of heat conductivity to algebraic equations is possible using other approaches. These methods are based on the analysis of the reference points, zero values of temperature distribution function, function inflection points, and its first and second derivatives. Here, we present formulas for the calculations of the temperature field on the assumption of the direct task solution for the half-bounded bar under the pulsed heating followed the re-definition of the boundary conditions. The regular thermal mode of the third family is name the mode at which the harmonic heating is set (repetitive) in time. At the set harmonic mode the law of fluctuation in the temperature of all points of body is known in time. The article describes three methods in which solutions are reduced to simple algebraic formulas when using the specified points on heating thermograms of test examples. These solutions allow algebraic deriving of simple relations for inverse problems of determination of thermophysical characteristics of solid bodies. The calculation formulas are given for the determination of the heat conductivity coefficient determination by three methods: by amplitude of temperature wave, a period of vibrations is a relative coefficient of heat exchange; by the change of phase of temperature wave; by a wave-length. The second method uses the values of two coordinates of the test sample in two different points where the equal temperature is reached at different points in time. The final solution of the equation is logarithmic. The analysis of known methods and techniques shows that experimental methods are oriented on the technical implementation and based on facilities of available equipment and instruments. Existing experimental techniques are based on specific constructions of measuring facilities. Simultaneously, there are well-studied methods of solution of thermal conductivity standard tasks set out in fundamental issues. The theoretical methods come from axioms, equations, and theoretical postulates, and they give the solution of inverse tasks of thermal conductivity. This work uses the solutions of direct tasks presented in the monograph by A. V. Lykov "The theory of heat conductivity". These solutions have a good theoretical background and experts' credit. The boundary conditions of the problem are next: the half-bounded thin bar is given. The side surface of the bar has a thermal insulation. At the initial moment, the harmonic heat source acts on the bar in its section at some distance from its end. Heat exchange occurs between the environment and the end of the bar according to Newton's law. The initial (relative) temperature of the bar is accepted equal to zero. The heat exchange between the free end face of the bar and the environment is gone according to Newton's law.
Keywords: coefficient of thermal conductivity; third-generation regular mode; harmonic heating; semi-limited solid.

*Надійшла до редакції
12 червня 2019 року*

*Рецензовано
21 вересня 2019 року*